Ejercicios resueltos de Álgebra Lineal - Básica

...a María Díaz Hernández

...is Tejero Escribano

...ira Hernández García

Esther Gil Cid

SANZ Y TORRES

Ejercicios resueltos de Álgebra Lineal

Ejercicios resueltos de Álgebra Lineal

SANZ Y TORRES

A Carlos Romera,
compañero de cuyo recuerdo están
impregnadas estas páginas.

PRÓLOGO

¿A quién va dirigido este libro?.

A todos los estudiantes que, además de aprender, deseen entrenarse en la tarea de hacer pruebas tipo test.

¿Sus objetivos?.

Consolidar los conceptos adquiridos previamente.
Profundizar en los métodos propios de la materia.
Abordar de forma gradual ejercicios y problemas más complicados.

¿Su contenido?.

440 ejercicios resueltos paso a paso, muchos de ellos seleccionados de entre los propuestos en anteriores pruebas presenciales, agrupados por secciones dentro de cada capítulo y en orden creciente de dificultad.

¿Método utilizado?.

El contenido está organizado de la misma forma que este prólogo: mediante preguntas que dirigen el proceso de razonamiento para resolver el problema enunciado.

Se han incorporado en muchos ejercicios conceptos teóricos básicos adquiridos con anterioridad a fin de no dispersar la atención del estudiante en su búsqueda. (El

acceso a dichos conocimientos es inmediato para los poseedores del texto "Álgebra Lineal Básica" en el C.D o en la Addenda que contiene).

Consideramos este procedimiento, próximo a la enseñanza programada, el más adecuado para el estudiante que no está continuamente bajo la mirada del profesor.

Madrid, agosto 2004.
Ana Díaz Hernández
Coordinadora

ÍNDICE

Capítulo 1
ESPACIOS VECTORIALES

1-1 Análisis de cúando un conjunto con una ley de composición interna y una operación de sus elementos con los números reales es espacio vectorial 1
1-2 Cuándo un subconjunto de un espacio vectorial es subespacio vectorial 17
1-3 Cuándo un sistema de vectores genera un espacio vectorial 27
1-4 Independencia lineal, bases y dimensión de espacios vectoriales finitos ... 41
1-5 Relación entre subespacios de un espacio vectorial finito, dimensiones, bases, suma y suma directa 53

Capítulo 2
APLICACIONES LINEALES

2-1 Definición de aplicación lineal entre dos espacios vectoriales 65
2-2 La matriz asociada a una aplicación lineal 75
2-3 Operaciones con matrices 85
2-4 Subespacios núcleo e imagen de una aplicación lineal 101
2-5 Cambios de base y matrices asociadas 113
2-6 Operaciones elementales en una matriz 131

Capítulo 3
DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

3-1 Determinante de una matriz cuadrada 143
3-2 Cálculo de determinantes 151
3-3 Propiedades de los determinantes y su cálculo a partir de ellas 159
3-4 Cálculo de la matriz inversa 175
3-5 Determinación del rango de una matriz; rango de un endomorfismo y rango de un sistema de vectores 191

Capítulo 4
SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

4-1 Sistemas de ecuaciones lineales: Definiciones, expresión matricial, relación con las aplicaciones lineales, sistemas homogéneos asociados 203
4-2 Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales 217
4-3 Cálculo de soluciones de un sistema de ecuaciones 237
4-4 Factorización *LU* 251

Capítulo 5
PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES Y ESPACIO EUCLÍDEO

5-1 Definición, propiedades y expresión matricial del producto escalar 261
5-2 Normas y vectores unitarios; ángulos y vectores ortogonales 273
5-3 Sistemas ortogonales y ortonormales de vectores. Método de ortonormalización de Gram-Schmidt 285
5-4 Subespacios ortogonales, subespacios ortogonales complementarios y matrices ortogonales 295

Capítulo 6
MATRICES SEMEJANTES

6-1 Matrices semejantes, matrices equivalentes y matrices congruentes 309
6-2 Valores propios y vectores propios 317
6-3 Diagonalización de matrices 325
6-4 Diagonalización de endomorfismos simétricos 337

Capítulo 7
FORMAS BILINEALES

7-1 Definiciones, propiedades y expresión matricial de las aplicaciones bilineales y las formas bilineales 345
7-2 Definición, propiedades y expresión matricial de las formas cuadráticas ... 357
7-3 Clasificación de formas cuadráticas 367

Capítulo 8
EL PROBLEMA DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

8-1 El problema de la programación lineal: Convexo de soluciones y las restricciones que lo limitan 377
8-2 Resolución geométrica del problema de la programación lineal en dos variables 387
8-3 Expresión matricial del problema general en *n* variables y los tipos de soluciones 399
8-4 Conjuntos convexos 403
8-5 Teorema Fundamental de la Programación Lineal 413
8-6 Fundamentos del Algoritmo Simplex 425

CAPÍTULO 1

ESPACIOS VECTORIALES

Ejercicios relativos a:

"Análisis de cuándo un conjunto con una ley de composición interna y una operación de sus elementos con los números reales es espacio vectorial."

1. Cuando en el conjunto $V = \{0, 1, 2\}$ se utilizan la operaciones habituales de sumar y multiplicar por un número real, se verifica: A) $(V, +)$ no es una estructura algebraica; B) $(V, +)$ es un grupo; C) $(V, +, \mathbb{R})$ tiene estructura de espacio vectorial; D) Ninguna de las anteriores.

❖ $(V, *, \circ, \ldots)$ es una estructura algebraica $\Leftrightarrow$ V es un conjunto en el que hay definidas una o más operaciones: $*$, $\circ$, ...

La respuesta evidente es A, ya que, la suma en este conjunto no es ley de composición interna: $1 + 2 = 3$, que no es elemento de V.

Por la misma razón no son correctas las demás opciones.

2. Si en el conjunto $V = \{(a, b) \in \mathbb{R}^2 / a > 0\}$ se define la ley de composición interna $(a, b) * (c, d) = (ac, b + d)$, es cierto que el elemento neutro de $(V, *)$

verifica: A) Es (0, 0); B) Existe pero no pertenece a V; C) No existe; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Los objetos matemáticos que forman V son pares de números reales, tales que, su primera coordenada es mayor que 0.

¿Es (0, 0) *elemento neutro?.*

(0, 0) no es el elemento neutro porque no pertenece a $V \Rightarrow$ A no es correcta.

¿Existe elemento neutro "(c, d)*"?.*

Si existiera un elemento neutro (c, d) debería verificar $(a, b) * (c, d) = (a, b)$ y $(c, d) * (a, b) = (a, b)$.

$$(a,b)*(c,d)=(a,b) \Rightarrow \begin{cases} ac=a \\ b+d=b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} c=1 \\ d=0 \end{cases} \Rightarrow \text{Es elemento neutro por la derecha.}$$

Si (1, 0) es el elemento neutro, debe verificar también que $(c, d) * (a, b) = (a, b)$, porque no sabemos si la operación es conmutativa, o no.

$(1, 0) * (a, b) = (1a, 0 + b) = (a, b) \Rightarrow$ Es elemento neutro por la izquierda.

$\Rightarrow$ Existe elemento neutro que es (1, 0) y pertenece a $V \Rightarrow$ Es correcta la opción D.

3. Si en el conjunto de números enteros se define la operación $a * b = ab - a - b + 2$, se verifica: A) Hay números enteros que no tienen un elemento simétrico entero; B) Existe un elemento neutro "e"; C) $(\mathbb{Z}, *)$ tiene estructura de grupo conmutativo; D) Ninguna de las anteriores.

❖ La operación definida no es una operación estándar, y hay que comprobar que el resultado de hacer la operación con dos números enteros cualesquiera es otro número entero; es evidente que esto es cierto, y por tanto, $*$ es una operación cerrada en $\mathbb{Z}$ (o interna), y podemos empezar a comprobar qué axiomas verifica.

❖ Como una de las opciones es "ser grupo conmutativo", hay que ver si cumple todos y cada uno de los axiomas de grupo conmutativo, si no cumple alguno no lo es.

a) ¿Es conmutativa?.

Sí es conmutativa porque $a * b = b * a$ siendo a, b números enteros cualesquiera.

Primer miembro: $a * b = ab - a - b + 2$.

Segundo miembro: $b * a = ba - b - a + 2$.

b) ¿Es asociativa?.

Sí es asociativa porque $(a * b) * c = a * (b * c)$ siendo a, b, c, números enteros cualesquiera.

Primer miembro: $(a * b) * c = (ab - a - b + 2) * c =$
$= (ab - a - b + 2)\, c - (ab - a - b + 2) - c + 2 = abc - ac - bc - ab + c + a + b.$

Segundo miembro: $a * (b * c) = a * (bc - b - c + 2) =$
$= a\,(bc - b - c + 2) - a - (bc - b - c + 2) + 2 = abc - ac - bc - ab + c + a + b.$

c) ¿Existe elemento neutro "e"?.

Si existe un elemento unidad, o neutro, "e", que es un número entero debe verificar que $a * e = e * a = a$, siendo a cualquier número entero.

$a * e = ae - a - e + 2 = a \Rightarrow ae - e = 2a - 2 \Rightarrow e\,(a - 1) = 2\,(a - 1) \Rightarrow e = 2$ si $a \neq 1$.

Si $a = 1$ no se puede simplificar, y comprobamos aparte que también se verifica $a * e = ae - a - e + 2 = a$, porque $1 * 2 = 1.2 - 1 - 2 + 2 = 1$.

2 es un número entero que también verifica $2 * a = a$, ya que, $2 * a =$
$= 2\,a - 2 - a + 2 = a$.

No hace falta comprobar que $a * e = e * a$, porque sabemos que es conmutativa.

$\Rightarrow$ Existe elemento unidad y es 2 $\Rightarrow$ La opción B es cierta.

d) *¿Cada número entero a tiene un elemento simétrico "a'"?.*

Si existe, debe verificar, para $a \neq 1$ que $a * a' = aa' - a - a' + 2 = 2$

$$\Rightarrow aa' - a' = a \Rightarrow a' = \frac{a}{a-1}.$$

Esta propiedad no es cierta porque, en general, el posible simétrico puede no ser un número entero.

El simétrico de $a = 1$ no se puede hallar por ese procedimiento porque no se puede dividir por 0, si existe debe verificar $1a' - 1 - a' + 2 = 2$, expresión equivalente a "1 = 2", que es imposible.

$\Rightarrow$ Es correcta la opción A y $(\mathbb{Z}, *)$ no tiene estructura de grupo.

4. Si consideramos el conjunto $V = \{Libro\}$, y en V con su único elemento definimos la operación: $Libro * Libro = Libro$, y la operación externa con los números reales: $\lambda \bullet (Libro) = Libro$ (si λ es cualquier número real), se verifica: A) No es grupo conmutativo; B) Es espacio vectorial; C) $(V, *)$ no es cerrado; D) Ninguna de las anteriores.

¿Es V un conjunto cerrado con la operación ∗?.

El resultado de hacer la operación con dos elementos de V es un elemento de V:

$$Libro * Libro = Libro.$$

es decir, la operación es interna (ó $(V, *)$ cerrado) y la opción C es falsa.

a) *¿Es asociativa la operación ∗ en el conjunto V?.*

Es asociativa porque $(a * b) * c = a * (b * c)$, ya que, el único elemento del conjunto es *Libro* y verifica: $(Libro * Libro) * Libro = Libro * (Libro * Libro)$.

Primer miembro: $(Libro * Libro) * Libro = Libro * Libro = Libro$.

Segundo miembro: $Libro * (Libro * Libro) = Libro * Libro = Libro$.

b) *¿Existe elemento neutro "e"?.*

Existe un elemento neutro *"e"*, que es un elemento del conjunto y verifica $a * e = e * a = a$, siendo a cualquier elemento del conjunto.

Se desprende de la definición de esta operación que *Libro* es el elemento neutro.

c) *¿Para cada elemento "a" del conjunto hay un elemento simétrico "a'"?.*

Si existe, debe ser del conjunto y verificar $a * a' = a' * a = Libro$.

Libro es el elemento simétrico de *Libro*.

d) *¿La operación definida es conmutativa?.*

Si lo es, debe ser cierto que $a * b = b * a$ siendo a, b elementos del conjunto.

Es evidente que $Libro * Libro = Libro * Libro$, y la operación es conmutativa.

$\Rightarrow (V, *)$ tiene estructura de grupo conmutativo y es falsa la opción A.

Análisis de los axiomas que se verifican respecto a la operación externa:

A) *¿Distributiva de los escalares respecto a los vectores:* $\lambda \bullet (\overline{x} * \overline{y}) = (\lambda \bullet \overline{x}) * (\lambda \bullet \overline{y})$*?.*

Debe verificarse: $\lambda \bullet (Libro * Libro) = (\lambda \bullet Libro) * (\lambda \bullet Libro)$.

Primer miembro: $\lambda \bullet (Libro * Libro) = \lambda \bullet Libro = Libro$.

Segundo miembro: $(\lambda \bullet Libro) * (\lambda \bullet Libro) = Libro * Libro = Libro$.

$\Rightarrow$ Sí verifica esta propiedad.

B) *¿Distributiva de los vectores respecto a los escalares:* $(\lambda + \mu) \bullet \overline{x} = (\lambda \bullet \overline{x}) * (\mu \bullet \overline{x})$ *?.*

En este caso debe verificarse que $(\lambda + \mu) \bullet Libro = (\lambda \bullet Libro) * (\mu \bullet Libro)$.

Primer miembro: $(\lambda + \mu) \bullet Libro = Libro$.

Segundo miembro: $(\lambda \bullet Libro) * (\mu \bullet Libro) = Libro * Libro = Libro$.

$\Rightarrow$ Sí verifica esta propiedad.

C) *¿Es verdad que* $(\lambda\mu) \bullet \overline{x} = \lambda \bullet (\mu \bullet \overline{x})$*?.*

Analicemos ambos miembros de la expresión $(\lambda\mu) \bullet Libro = \lambda \bullet (\mu \bullet Libro)$.

Primer miembro: $(\lambda\mu) \bullet Libro = Libro$.

Segundo miembro: $\lambda \bullet (\mu \bullet Libro) = \lambda \bullet (Libro) = Libro$.

$\Rightarrow$ Sí verifica esta propiedad.

D) *¿Verifica el escalar unidad "*1*" que* $1 \bullet \overline{x} = \overline{x}$*?.*

$1 \bullet Libro = Libro$, es cierto con la definición dada.

$\Rightarrow$ Podemos afirmar que $(V, *, \bullet\, \mathbb{R})$ es un espacio vectorial y es correcta la opción B.

❖ El conjunto dado es espacio vectorial, el único vector del espacio es *Libro*.

5. Sabiendo que $(\mathbb{R}^2, +)$ es un grupo conmutativo, cuando definimos la siguiente operación de sus elementos con los escalares: $\lambda \bullet (x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0)$ no se verifican las siguientes propiedades: A) Distributiva de los escalares respecto a los vectores; B) Distributiva de los vectores respecto a los escalares; C) Asociativa; D) Existencia de un escalar unidad.

❖ Los objetos matemáticos con que estamos trabajando son los elementos de $\mathbb{R}^2$, y los escalares "λ" con que hacemos la operación que hemos definido son números reales.

Vamos a estudiar las propiedades que tiene esta operación de multiplicar escalar por vector.

A) *¿Distributiva de los escalares respecto a los vectores:* $\lambda \bullet (\overline{x} + \overline{y}) = (\lambda \bullet \overline{x}) + (\lambda \bullet \overline{y})$*?.*

Primer miembro: $\lambda \bullet (\overline{x} + \overline{y}) = \lambda \bullet (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = \big(\lambda\,(x_1 + y_1), 0\big) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, 0)$.

Segundo miembro: $\lambda \bullet (x_1, x_2) + \lambda \bullet (y_1, y_2) = (\lambda x_1, 0) + (\lambda y_1, 0) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, 0)$.

$\Rightarrow$ Sí verifica esta propiedad.

B) *¿Distributiva de los vectores respecto a los escalares:* $(\lambda + \mu) \bullet \overline{x} = (\lambda \bullet \overline{x}) + (\lambda \bullet \overline{x})$*?.*

Primer miembro: $(\lambda + \mu) \bullet (x_1, x_2) = \big((\lambda + \mu)\, x_1,\ 0\big) = (\lambda x_1 + \mu x_1,\ 0)$.

Segundo miembro: $\lambda \bullet (x_1, x_2) + \mu \bullet (x_1, x_2) = (\lambda x_1, 0) + (\mu x_1, 0) = (\lambda x_1 + \mu x_1, 0)$.

$\Rightarrow$ Sí verifica esta propiedad.

C) *¿Asociativa* $(\lambda\mu) \bullet \overline{x} = \lambda \bullet (\mu \bullet \overline{x})$*?.*

Primer miembro: $(\lambda\mu) \bullet (x_1, x_2) = \big((\lambda\mu)\, x_1,\ 0\big) = (\lambda\mu x_1,\ 0)$.

Segundo miembro: $\lambda \bullet \big(\mu \bullet (x_1, x_2)\big) = \lambda \bullet (\mu x_1,\ 0) = (\lambda\mu x_1,\ 0)$.

$\Rightarrow$ Sí verifica esta propiedad.

D) *¿El escalar unidad cumple que* $1 \bullet \overline{x} = \overline{x}$*?.*

Primer miembro: $1 \bullet (x_1, x_2) = (1x_1, 0) = (x_1, 0)$.

Segundo miembro: (x_1, x_2).

Los dos miembros son distintos $\Rightarrow$ No verifica esta propiedad y es cierta la opción D.

❖ Podemos afirmar que no es un espacio vectorial puesto que no cumple una de las condiciones necesarias.

6. El conjunto de los números reales positivos (distintos de 0) con la operación de multiplicar estándar verifica que: A) No tiene elemento neutro; B) Hay elementos cuyo simétrico no es un número real positivo; C) La operación no es asociativa; D) La operación no es conmutativa.

❖ El resultado de hacer la operación de multiplicar dos números reales positivos distintos de 0 es un número real positivo, es decir, la multiplicación es ley de composición interna para los números reales positivos.

Análisis de los axiomas de grupo que verifica, o no, la operación de multiplicar dos números reales positivos distintos de 0:

a) *¿Es asociativa?.*

Sí porque $(ab)\,c = a\,(bc)$.

b) *¿Existe un elemento neutro?.*

Sí, porque "1" es un número real positivo y verifica $a1 = 1a = a$, siendo a cualquier número real positivo.

c) *¿Para cada número real positivo "a" del conjunto hay un número real positivo simétrico "a'"?.*

Si existe, debe verificar $aa' = a'a = 1 \Rightarrow a' = 1/a$; ($a'$ es real y positivo).

d) *¿La operación definida es conmutativa?.*

Sí, porque $ab = ba$ siendo a, b números reales positivos.

$\Rightarrow$ No es cierta ninguna de las opciones dadas.

7. Si en el conjunto de los números reales positivos (distintos de 0) "$\mathbb{R}^{+}$" con la operación de multiplicar estándar, definimos la siguiente operación externa con los números reales: $\lambda \bullet x = x^{\lambda}$, se verifican las siguientes propiedades: A) $\lambda \bullet (xy) = (\lambda \bullet x)\,(\lambda \bullet y)$; B) $(\lambda + \mu) \bullet x = (\lambda \bullet x)\,(\mu \bullet x)$; C) $(\lambda\mu) \bullet x = \lambda \bullet (\mu \bullet x)$; D) Existe un escalar unidad.

a) $¿\lambda \bullet (xy) = (\lambda \bullet x)\,(\lambda \bullet y)?$.

Primer miembro: $\lambda \bullet (xy) = (xy)^{\lambda} = x^{\lambda}y^{\lambda}$.

Segundo miembro: $(\lambda \bullet x)\,(\lambda \bullet y) = x^{\lambda}y^{\lambda}$.

$\Rightarrow$ Sí verifica esta propiedad $\Rightarrow$ Es cierta la opción A.

b) $¿(\lambda + \mu) \bullet x = (\lambda \bullet x)\,(\mu \bullet x)?$.

Primer miembro: $(\lambda + \mu) \bullet x = x^{\lambda+\mu} = x^{\lambda}x^{\mu}$.

Segundo miembro: $(\lambda \bullet x)\,(\mu \bullet x) = x^{\lambda}x^{\mu}$.

$\Rightarrow$ Sí verifica esta propiedad $\Rightarrow$ Es cierta la opción B.

c) $¿(\lambda\mu) \bullet x = \lambda \bullet (\mu \bullet x)?$.

Primer miembro: $(\lambda\mu) \bullet x = x^{\lambda\mu}$.

Segundo miembro: $\lambda \bullet (\mu \bullet x) = \lambda \bullet (x^{\mu}) = (x^{\mu})^{\lambda} = x^{\mu\lambda} = x^{\lambda\mu}$.

$\Rightarrow$ Sí verifica esta propiedad $\Rightarrow$ Es cierta la opción C.

d) *¿El número real "1" verifica* $1 \bullet x = x?$.

$1 \bullet x = x^{1} = x \Rightarrow$ Sí verifica esta propiedad $\Rightarrow$ Es cierta la opción D.

8. Si en el conjunto de los números reales positivos (distintos de 0) se define la operación de multiplicar y la siguiente la operación externa con los números reales: $\lambda \bullet x = x^{\lambda}$, se verifica: A) El conjunto de los números reales positivos con la operación de multiplicar no es grupo conmutativo; B) El conjunto de los números reales positivos con la operación de multiplicar es grupo no conmutativo; C) El conjunto de los números reales positivos con ambas operaciones es espacio vectorial; D) Ninguna de las anteriores.

Como consecuencia de las propiedades analizadas en el ejercicio 6 podemos decir que $(\mathbb{R}^{+}, .)$ tiene estructura de grupo conmutativo.

Utilizando el estudio hecho en el ejercicio 7 junto al resultado anterior, podemos decir que $(\mathbb{R}^+, ., \bullet\mathbb{R})$ tiene estructura de espacio vectorial.

$\Rightarrow$ Es correcta la opción C.

9. El conjunto $V = \{(x_1, x_2) / x_1 \in \mathbb{R}^+, x_2 \in \mathbb{R}\}$ con la operación $(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2 + y_2)$verifica: A) Tiene elemento neutro; B) Todo elemento tiene un simétrico en V; C) Es asociativo; D) Es conmutativo.

❖ Los objetos matemáticos del conjunto V son pares de números reales, tales que, el primer elemento del par es positivo distinto de 0.

❖ El resultado de hacer la operación propuesta es otro par de las mismas características, es decir, la operación es cerrada en V.

❖ Las propiedades de las diferentes opciones son los axiomas de grupo, veamos los que verifica esta operación:

a) ¿Es asociativa?.

Sí, porque $\big((x_1, x_2) * (y_1, y_2)\big) * (z_1, z_2) = (x_1, x_2) * \big((y_1, y_2) * (z_1, z_2)\big)$.

Primer miembro:

$$\big((x_1, x_2) * (y_1, y_2)\big) * (z_1, z_2) = (x_1y_1, x_2 + y_2) * (z_1, z_2) = (x_1y_1z_1, x_2 + y_2 + z_2).$$

Segundo miembro:

$$(x_1, x_2) * \big((y_1, y_2) * (z_1, z_2)\big) = (x_1, x_2) * (y_1z_1, y_2 + z_2) = (x_1y_1z_1, x_2 + y_2 + z_2).$$

b) ¿Es conmutativa?.

Sí, porque $(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (y_1, y_2) * (x_1, x_2)$.

Primer miembro: $(x_1, x_2) * (y_1, y_2) = (x_1y_1, x_2 + y_2)$.

Segundo miembro: $(y_1, y_2) * (x_1, x_2) = (y_1x_1, y_2 + x_2)$.

c) *¿Existe elemento neutro?.*

Sí, porque existe el par (e_1, e_2), que verifica: $(x_1, x_2) * (e_1, e_2) = (e_1, e_2) * (x_1, x_2) = (x_1, x_2)$, siendo (x_1, x_2) cualquier par de V.

$$(x_1,x_2)*(e_1,e_2)=(x_1e_1,x_2+e_2)\Rightarrow\begin{cases}x_1e_1=x_1\\x_2+e_2=x_2\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}e_1=1\\e_2=0\end{cases}\Rightarrow$$ El par (1, 0) es el elemento neutro.

❖ Es suficiente comprobar que $(x_1, x_2) * (e_1, e_2) = (x_1, x_2)$ porque la operación es conmutativa.

d) *¿Para cada par (x_1, x_2) del conjunto hay un par simétrico (x_1', x_2')?.*

Si existe (x_1', x_2'), debe ser cierto que $(x_1, x_2) * (x_1', x_2') = (1, 0)$.

Se debe verificar: $(x_1,x_2)*(x_1',x_2')=(x_1x_1',x_2+x_2')=(1,0)\Rightarrow\begin{cases}x_1x_1'=1\\x_2+x_2'=0\end{cases}\Rightarrow$

$$\Rightarrow\begin{cases}x_1'=\dfrac{1}{x_1}\\x_2'=-x_2\end{cases}\Rightarrow\left(\frac{1}{x_1},-x_2\right)$$ es el par simétrico de (x_1, x_2), que existe para cualcualquier valor de (x_1, x_2) y pertenece a V.

$\Rightarrow$ Son ciertas las cuatro opciones dadas y $(V, *)$ es un grupo conmutativo.

10. Si en el conjunto $V = \{(x_1, x_2)/x_1 \in \mathbb{R}^+, x_2 \in \mathbb{R}\}$ con la operación $*$ del ejercicio anterior se define también la siguiente operación de los elementos de V con los números reales: $\lambda \bullet (x_1,x_2)=(x_1^{\lambda},\lambda x_2),\lambda\in\mathbb{R}$, se verifica: A) Distributiva de los escalares respecto a los vectores; B) Distributiva de los vectores respecto a los escalares; C) $(\lambda\mu)\bullet(x_1,x_2)=\lambda\bullet\left(\mu\bullet(x_1,x_2)\right)$; D) Existe un escalar unidad.

❖ Los elementos de V son pares de números reales, el primero de los cuales es mayor que 0.

A) *¿Distributiva de los escalares respecto a los vectores:*
$\lambda \bullet \big((x_1,x_2) * (y_1,y_2)\big) = \big(\lambda \bullet (x_1,x_2)\big) * \big(\lambda \bullet (y_1,y_2)\big)$*?.*

Primer miembro: $\lambda \bullet \big((x_1,x_2) * (y_1,y_2)\big) = \lambda \bullet (x_1y_1, x_2+y_2) = \big((x_1y_1)^\lambda, \lambda(x_2+y_2)\big)$.

Segundo miembro: $\big(\lambda \bullet (x_1,x_2)\big) * \big(\lambda \bullet (y_1,y_2)\big) = (x_1^\lambda, \lambda x_2) * (y_1^\lambda, \lambda y_2) =$
$= (x_1^\lambda y_1^\lambda, \lambda x_2 + \lambda y_2)$.

$\Rightarrow$ Sí verifica esta propiedad porque ambos miembros son iguales $\Rightarrow$ A es cierta.

B) *¿Distributiva de los vectores respecto a los escalares:* $(\lambda+\mu)\bullet(x_1,x_2) =$
$= \big(\lambda \bullet (x_1,x_2)\big) * \big(\mu \bullet (x_1,x_2)\big)$ *?.*

Primer miembro: $(\lambda+\mu)\bullet(x_1,x_2) = \big(x_1^{(\lambda+\mu)}, (\lambda+\mu)x_2\big)$.

Segundo miembro: $\big(\lambda \bullet (x_1,x_2)\big) * \big(\mu \bullet (x_1,x_2)\big) = (x_1^\lambda, \lambda x_2) * (x_1^\mu, \mu x_2) =$
$= (x_1^\lambda x_1^\mu, \lambda x_2 + \mu x_2)$.

$\Rightarrow$ Sí verifica esta propiedad porque ambos miembros son iguales $\Rightarrow$ B es cierta.

C) *¿* $(\lambda\mu)\bullet(x_1,x_2) = \lambda \bullet \big(\mu \bullet (x_1,x_2)\big)$ *?.*

Primer miembro: $(\lambda\mu)\bullet(x_1,x_2) = (x_1^{\lambda\mu}, \lambda\mu x_2)$.

Segundo miembro: $\lambda \bullet \big(\mu \bullet (x_1,x_2)\big) = \lambda \bullet \big(x_1^\mu, \mu x_2\big) = \big((x_1^\mu)^\lambda, \lambda\mu x_2\big)$.

$\Rightarrow$ Sí verifica esta propiedad $\Rightarrow$ C es cierta.

D) *¿El número real* 1 *verifica* $1\bullet(x_1,x_2) = (x_1^1, 1x_2) = (x_1,x_2)$ *?.*

$\Rightarrow$ Sí verifica esta propiedad $\Rightarrow$ D es cierta.

❖ Como consecuencia del ejercicio anterior y de éste podemos afirmar que $(V, *, \bullet\mathbb{R})$ es un espacio vectorial.

11. Sabiendo que $(\mathbb{R}^2, +)$ es un grupo conmutativo, definimos la siguiente operación producto de los escalares por los elementos de $\mathbb{R}^2$: $\lambda \bullet (x_1, x_2) = (\lambda x_1, x_2)$, entonces $(\mathbb{R}^2, +, \bullet\mathbb{R})$ verifica: A) Es espacio vectorial; B) El producto de escalares por la suma de elementos de $\mathbb{R}^2$ no es distributivo; C) El producto de elementos de $\mathbb{R}^2$ por la suma de escalares no es distributivo; D) No hay un escalar que sea elemento unidad en la operación externa definida.

A) *¿Distributiva de los escalares respecto a la suma de elementos de* $\mathbb{R}^2$*:* $\lambda \bullet (\overline{x} + \overline{y}) = \lambda\overline{x} + \lambda\overline{y}$ *?.*

Primer miembro:

$$\lambda \bullet (\overline{x} + \overline{y}) = \lambda \bullet (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = \big(\lambda(x_1 + y_1), x_2 + y_2\big) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, x_2 + y_2).$$

Segundo miembro:

$$\lambda \bullet (x_1, x_2) + \lambda \bullet (y_1, y_2) = (\lambda x_1, x_2) + (\lambda y_1, y_2) = (\lambda x_1 + \lambda y_1, x_2 + y_2).$$

Sí verifica esta propiedad $\Rightarrow$ Es falsa la opción B.

B) *¿Distributiva de la suma de escalares respecto a los elementos de* $\mathbb{R}^2$*:* $(\lambda + \mu) \bullet \overline{x} = (\lambda \bullet \overline{x}) + (\mu \bullet \overline{x})$ *?.*

Primer miembro: $(\lambda + \mu) \bullet (x_1, x_2) = \big((\lambda + \mu)(x_1, x_2)\big) = (\lambda x_1 + \mu x_1, x_2).$

Segundo miembro: $\lambda \bullet (x_1, x_2) + \mu \bullet (x_1, x_2) = (\lambda x_1, x_2) + (\mu x_1, x_2) =$
$= (\lambda x_1 + \mu x_1, 2x_2).$

No verifica esta propiedad $\Rightarrow$ Es cierta la opción C.

C) *¿El escalar unidad verifica que* $1 \bullet \overline{x} = \overline{x}$ *?.*

Primer miembro: $1 \bullet (x_1, x_2) = (1x_1, x_2) = (x_1, x_2).$

Segundo miembro: (x_1, x_2).

Sí verifica esta propiedad $\Rightarrow$ Es falsa la opción D.

❖ Para que sea espacio vectorial debe verificar todos los axiomas, como consecuencia, también es falsa la opción A.

12. Si en el conjunto de números enteros se define la operación $x * y = xy + 1$, la operación dada tiene la propiedad: A) Asociativa; B) Existe elemento neutro; C) Es conmutativa; D) Ninguna de las anteriores.

a) ¿Asociativa?.

Para que verifique la propiedad asociativa debe cumplirse $(x * y) * z = x * (y * z)$.

Primer miembro: $(x * y) * z = (xy + 1) * z = (xy + 1)\, z + 1 = xyz + z + 1$.

Segundo miembro: $x * (y * z) = x * (yz + 1) = x\,(yz + 1) + 1 = xyz + x + 1$.

La opción A es falsa porque las dos expresiones no son iguales.

b) ¿Existe elemento neutro?.

Si existe elemento neutro debe verificar $e * x = x * e = x \Rightarrow ex + 1 = x \Rightarrow e = \dfrac{x-1}{x}$ que, en general, no será un número entero (para $x = 0$ no existe) $\Rightarrow$ La opción B es falsa.

c) ¿Es conmutativa?.

La opción C es cierta por la conmutatividad de $(\mathbb{Z}, .)$.

13. Se define la operación $\lambda \bullet (x_1, x_2) = (\lambda^2 x_1, \lambda x_2)$ siendo $\lambda \in \mathbb{R}$ y $\bar{x} = (x_1, x_2) \in \mathbb{R}^2$. De entre las siguientes opciones, elíjase la correcta: A) $(\lambda + \mu) \bullet \bar{x} = \lambda \bullet \bar{x} + \mu \bullet \bar{x}$; B) $\lambda \bullet (\bar{x} + \bar{y}) = \lambda \bullet \bar{x} + \lambda \bar{y}$; C) $1 \bullet \bar{x} \neq \bar{x}$; D) Ninguna de las anteriores.

¿Es cierta la opción A*?.*

Primer miembro:

$$(\lambda + \mu) \bullet (x_1, x_2) = \left((\lambda + \mu)^2 x_1, (\lambda + \mu) x_2\right) = (\lambda^2 x_1 + 2\lambda\mu x_1 + \mu^2 x_1, \lambda x_2 + \mu x_2).$$

Segundo miembro:

$$\lambda \bullet (x_1, x_2) + \mu \bullet (x_1, x_2) = (\lambda^2 x_1, \lambda x_2) + (\mu^2 x_1, \mu x_2) = (\lambda^2 x_1 + \mu^2 x_1, \lambda x_2 + \mu x_2).$$

$\Rightarrow$ No es cierta porque el primero y el segundo miembro no son iguales.

¿Es cierta la opción B*?.*

Primer miembro:

$$\lambda \bullet \big((x_1, x_2) + (y_1, y_2)\big) = \lambda \bullet (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = \big(\lambda^2 (x_1 + y_1), \lambda (x_2 + y_2)\big).$$

Segundo miembro:

$$\lambda \bullet (x_1, x_2) + \lambda \bullet (y_1, y_2) = (\lambda^2 x_1, \lambda x_2) + (\lambda^2 y_1, \lambda y_2) = (\lambda^2 x_1 + \lambda^2 y_1, \lambda x_2 + \lambda y_2).$$

$\Rightarrow$ Sí es cierta porque el primero y el segundo miembro son iguales.

¿Es cierta la opción C*?.*

El escalar unidad, 1, verifica $1 \bullet \bar{x} = \bar{x}$:

$$1 \bullet (x_1, x_2) = (1^2 x_1, 1 x_2) = (x_1, x_2).$$

$\Rightarrow$ No es cierta porque el primero y el segundo miembro sí son iguales, y la pregunta es "¿son distintos $1 \bullet \bar{x}$ y $\bar{x}$?".

¿Es cierta la opción D*?.*

No es cierta la opción D ya que se verifica una de las anteriores.

Ejercicios relativos a:

"Cuándo un subconjunto de un espacio vectorial es subespacio vectorial."

1. El conjunto S de soluciones de la ecuación $x_1 + 2x_2 - 3x_3 = 0$ verifica: A) Es un subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R})$; B) La suma de dos soluciones de la ecuación no es solución de la ecuación; C) El producto de un escalar por una solución puede no ser solución; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Para ver si es espacio vectorial, o no, podemos:

a) Comprobar que verifica todos los axiomas.

b) Utilizar la caracterización, ya que la ecuación dada siempre tiene soluciones de la forma $(s_1, s_2, s_3) \in \mathbb{R}^3$, y por tanto S es un subconjunto no vacío de $\mathbb{R}^3$.

Optaremos por la segunda vía, que es mucho más corta.

❖ Los elementos de S son soluciones de la ecuación dada, es decir, (s_1, s_2, s_3) de $\mathbb{R}^3$ que verifican $s_1 + 2s_2 - 3s_3 = 0$.

¿Pertenece a "S" la suma de dos elementos de "S"?.

Si tomamos dos soluciones de la ecuación: (s_1, s_2, s_3) y (t_1, t_2, t_3), se debe verificar que $(s_1, s_2, s_3) + (t_1, t_2, t_3) = (s_1 + t_1, s_2 + t_2, s_3 + t_3) \in S$.

Comprobemos que es así:

$(s_1, s_2, s_3) \in S \Leftrightarrow s_1 + 2s_2 - 3s_3 = 0$ y $(t_1, t_2, t_3) \in S \Leftrightarrow t_1 + 2t_2 - 3t_3 = 0$;

sumando miembro a miembro las dos ecuaciones y reagrupando los sumandos obtenemos:

$(s_1 + 2s_2 - 3s_3) + (t_1 + 2t_2 - 3t_3) = (s_1 + t_1) + 2(s_2 + t_2) - 3(s_3 + t_3) = 0$, que demuestra que $(s_1, s_2, s_3) + (t_1, t_2, t_3)$ es solución de la ecuación dada, es decir, verifica $(s_1, s_2, s_3) + (t_1, t_2, t_3) \in S$.

La suma de dos soluciones de la ecuación es solución de la ecuación $\Rightarrow$ B es falsa.

¿Pertenece a S el producto de un escalar por un elemento de S?.

Es cierto que $\lambda(s_1, s_2, s_3) \in S$, y es evidente que es así, porque $\lambda(s_1 + 2s_2 - 3s_3) = \lambda 0 = 0$.

El producto de un escalar por una solución es solución $\Rightarrow$ La opción C es falsa.

Se verifica que la suma de dos soluciones de la ecuación es solución de la ecuación y el producto de un escalar por una solución es solución $\Rightarrow$ Sí es subespacio vectorial y es correcta la opción A.

2. El subconjunto $U = \{(x_1, x_2)/x_2 = 1\}$ de $\mathbb{R}^2$ verifica: A) $(U, +)$ no es grupo conmutativo; B) $(U, +)$ no es subgrupo de $(\mathbb{R}^2, +)$; C) $(U, +, \mathbb{R})$ es subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R})$; D) Ninguna de las anteriores.

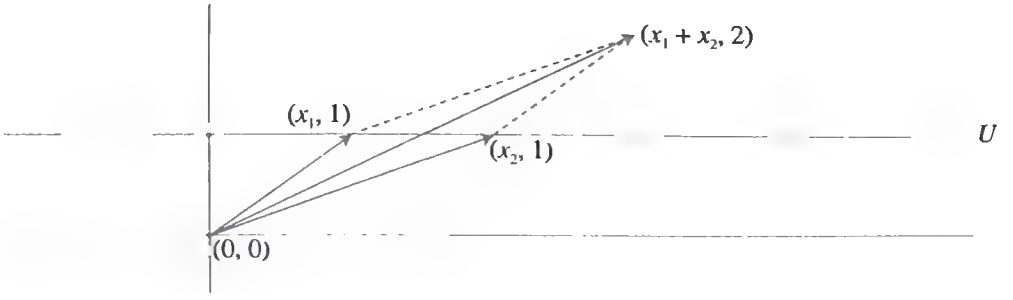
❖ Los elementos de U son pares de números reales cuya segunda coordenada es 1.

¿Pertenece a U la suma de dos elementos de U?.

La suma de dos elementos de U no está en U.

$(x_1, 1) + (y_1, 1) = (x_1 + y_1, 2)$ que no pertenece a U porque la segunda coordenada del par no es 1.

$\Rightarrow U$ no es grupo, no es subgrupo ni es subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R}) \Rightarrow$ Son correctas las opciones A y B, y es falsa la C.



❖ En este caso es evidente que $(U, +)$ no es grupo, ya que el elemento neutro (0,0) no es de U (no es 1 su segunda coordenada).

3. El subconjunto $U = \{(x_1, x_2)/x_1 = x_2\}$ de $\mathbb{R}^2$ verifica: A) $(U, +)$ no es grupo conmutativo; B) $(U, +)$ no es subgrupo de $(\mathbb{R}^2, +)$; C) $(U, +, \mathbb{R})$ es subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R})$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Los elementos de U son pares reales que tienen las dos coordenadas iguales.

¿Pertenece a U la suma de dos elementos de U?.

Sí, porque $(x_1, x_1) + (y_1, y_1) = (x_1 + y_1, x_1 + y_1)$, que pertenece a U. (La segunda coordenada del par es igual que la primera).

¿Pertenece a U el producto de un escalar por un elemento de U?.

El producto de un número por un elemento de U pertenece a U: $\lambda(x_1, x_1) = (\lambda x_1, \lambda x_1)$.

¿Es U un subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R})$*?.*

Sí, porque verifica las dos condiciones anteriores $\Rightarrow$ Es correcta la opción C y son falsas A y B porque $(U, +, \mathbb{R})$ es espacio vectorial.

4. El subconjunto $U = \{(x_1, x_2)/x_1x_2 = 0\}$ de $\mathbb{R}^2$ verifica: A) La suma de dos elementos de U pertenece a U ; B) $(U, +)$ es subgrupo de $(\mathbb{R}^2, +)$; C) $(U, +, \mathbb{R})$ es espacio vectorial de $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R})$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Los elementos de U son pares reales, tales que, el producto de sus dos coordenadas es 0.

¿Pertenece a U la suma de dos elementos de U?.

No, la suma de dos elementos de U puede no estar en U.

$(x_1, x_2) + (y_1, y_2) = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)$, sabemos que $x_1x_2 = 0$ y $y_1y_2 = 0$, pero no es suficiente para asegurar que $(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = 0$, ya que $(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = x_1x_2 + x_1y_2 + y_1x_2 + y_1y_2 = x_1y_2 + y_1x_2$.

Así ocurre en el ejemplo siguiente:

Sean $(x_1, x_2) = (1, 0)$; $(y_1, y_2) = (0, 2) \Rightarrow (x_1 + y_1, x_2 + y_2) = (1, 2)$; los pares dados son de U, pero no lo es su suma porque $(x_1 + y_1)(x_2 + y_2) = 1.2 \neq 0 \Rightarrow (U, +, \mathbb{R})$ no es grupo ni subgrupo ni espacio vectorial $\Rightarrow$ Las opciones A, B, C son falsas; es correcta la D.

❖ Observemos que no es suficiente que el elemento neutro, o unidad, pertenezca al subconjunto para asegurar que es subespacio vectorial, aunque sí es condición necesaria.

❖ La representación gráfica de U en $\mathbb{R}^2$ es el conjunto formado por los dos ejes de coordenadas, y por tanto, no es un subespacio vectorial.

❖ Los únicos subespacios propios de $\mathbb{R}^2$ son cada una de las rectas que pasan por el origen, pero no la unión de dos o más.

5. El subconjunto $U = \{(x_1, x_2, x_3)/x^2_1 + x^2_2 + x^2_3 \geq 1\}$ de $\mathbb{R}^3$ verifica: A) La suma de dos elementos de U pertenece a U; B) $(U, +)$ no es subgrupo de $(\mathbb{R}^2, +)$; C) $(U, +, \mathbb{R})$ es subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R})$; D) Ninguna de las anteriores.

¿Pertenece a U la suma de dos elementos de U?.

No, la suma de dos elementos de U puede no estar en U.

Ejemplo:

$(1, 1, 1)$ es un elemento de U, ya que $1^2 + 1^2 + 1^2 = 3 \geq 1$.
$(-1, -1, -1)$ es un elemento de U, ya que $(-1)^2 + (-1)^2 + (-1)^2 = 3 \geq 1$.
$(1, 1, 1) + (-1, -1, -1) = (0, 0, 0)$ no es un elemento de U, ya que $0^2 + 0^2 + 0^2 = 0 < 1$.

$\Rightarrow$ Las opciones A, C, D son falsas, es correcta la B.

6. Son subespacios vectoriales de cualquier espacio vectorial real V: A) El conjunto vacío; B) El número real 1; C) El elemento neutro de la operación interna de V; D) Ninguna de las anteriores.

De la definición de subespacio se desprende que la opción A es incorrecta.

La opción B también es incorrecta: Si el único elemento del conjunto es el número real 1, en general, no es el elemento neutro de la ley de composición interna y el conjunto no puede ser subespacio si no contiene dicho elemento neutro.

La opción C es correcta, y, la D incorrecta.

7. En el espacio vectorial $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R})$ son subespacios: A) Cualquier recta; B) Cualquier plano; C) $\{(0, 0, 0)\}$; D) $(\mathbb{R}^3, +, \mathbb{R})$.

Del espacio vectorial $\mathbb{R}^3$ quedan excluidos como subespacios todos los conjuntos que no contengan $(0, 0, 0) \Rightarrow$ Las opciones A y B son falsas porque hay rectas y planos que no pasan por el origen.

Las opciones C y D son ciertas, el neutro de la ley de composición interna y el espacio vectorial son subespacios impropios del espacio dado.

8. El conjunto de polinomios reales de grado cuatro con las operaciones estándar de sumar y multiplicar por escalares verifica: A) La suma de dos de sus elementos pertenece al conjunto; B) El producto de un polinomio por un número real pertenece al conjunto; C) Es espacio vectorial; D) Es subespacio vectorial del espacio de polinomios reales.

❖ Los polinomios de grado cuatro tienen la forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ con $a \neq 0$.

¿La suma de dos polinomios de grado cuatro es un polinomio de grado 4?.

La opción A es falsa porque si los dos polinomios tienen el coeficiente de x^4 con el mismo valor absoluto y signo diferente, el coeficiente de x^4 en el polinomio suma es 0.

Ejemplo:

$(-5x^4 + 3x^3 + 4x^2 - x + 7) + (5x^4 + 2x^2 + x) = 3x^3 + 6x^2 + 7$, que no es de grado 4.

$\Rightarrow$ No es espacio vectorial y son falsas las opciones C y D.

¿El producto de un escalar por un polinomio de grado cuatro es un polinomio de grado cuatro?.

$\lambda\,(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$ es un polinomio de grado cuatro si $\lambda \neq 0$.

Si $\lambda = 0$ se obtiene el polinomio $0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$, que no es del conjunto, es de grado 0

$\Rightarrow$ Es falsa la opción B.

9. El conjunto de polinomios reales de grado menor o igual que cuatro con las operaciones estándar de sumar y multiplicar por escalares verifica: A) La suma de dos de sus elementos pertenece al conjunto; B) El producto de un escalar por un elemento del conjunto pertenece al conjunto; C) Es espacio vectorial; D) Es subespacio vectorial del espacio de polinomios reales.

❖ Los polinomios reales de grado menor o igual que cuatro tienen la forma $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$, con a, b, c, d números reales.

¿La suma de dos polinomios de grado menor o igual que cuatro es un polinomio de grado menor o igual que cuatro?.

Sí, porque $(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e) + (a'x^4 + b'x^3 + c'x^2 + d'x + e') =$
$= (a + a')\,x^4 + (b + b')\,x^3 + (c + c')\,x^2 + (d + d')\,x + (e + e')$, que es un polinomio de grado menor o igual que cuatro.

$\Rightarrow$ La opción A es cierta.

¿El producto de un escalar por polinomio de grado menor o igual que cuatro es un polinomio de grado menor o igual que cuatro?.

$\lambda\,(ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e)$ es un polinomio del mismo grado que $ax^4 + bx^3 + cx^2 + dx + e$ si $\lambda \neq 0$, y el polinomio $0x^4 + 0x^3 + 0x^2 + 0x + 0$, si $\lambda = 0$.

$\Rightarrow$ Es cierta la opción B.

$\Rightarrow$ Es cierta la opción C por ser ciertas A y B.

❖ Dando por sabido que el conjunto de polinomios reales es un espacio vectorial, podemos asegurar que también es cierta la opción D.

10. El subconjunto $\wp$ formado por todas las n-uplas de números reales, tales que los elementos de cada una de ellas forman una progresión aritmética verifica que: A) La suma de dos progresiones aritméticas es una progresión aritmética; B) El producto de una progresión aritmética por un número real es una progresión aritmética; C) No tiene elemento neutro para la suma; D) Es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

❖ Los elementos de $\wp$ son de la forma $(a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, ..., a_1 + (n-1)\,d)$, donde a_1 representa el primer elemento, d la razón y n el número de elementos de la progresión.

¿La suma de dos progresiones aritméticas es una progresión aritmética?.

La respuesta es sí, porque

$$\left(a_1, a_1+d, a_1+2d, ..., a_1+(n-1)d\right)+\left(a_1', a_1'+d', a_1'+2d', ..., a_1'+(n-1)d'\right)=$$
$$=\left((a+a_1'), (a+a_1')+(d+d'), (a+a_1')+2(d+d'), ..., (a+a_1')+(n-1)(d+d')\right),$$

es decir, la suma de dos progresiones aritméticas es una progresión aritmética cuyo primer término es la suma del primer término de cada una de las progresiones dadas, y, cuya razón es la suma de las razones.

$\Rightarrow$ La opción A es cierta.

¿El producto de un escalar por una progresión aritmética es una progresión aritmética?.

$$\lambda\left(a_1, a_1+d, a_1+2d, ..., a_1+(n-1)d\right)=\left(\lambda a_1, \lambda a_1+\lambda d, \lambda a_1+2\lambda d, ..., \lambda a_1+(n-1)\lambda d\right).$$

que es una progresión aritmética de primer término λa_1 y razón λd.

$\Rightarrow$ La opción B es cierta.

¿Hay una progresión aritmética que sea elemento neutro de la suma?.

Sí, es la progresión cuyo primer elemento es 0 y cuya razón es 0.

$$(a_1, a_1+d, a_1+2d, ..., a_1+(n-1)d)+(0,0,0...,0)=$$
$$=(a_1, a_1+d, a_1+2d, ..., a_1+(n-1)d).$$

$\Rightarrow$ La opción C es falsa.

El conjunto $\wp$ formado por todas las progresiones aritméticas de n términos es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n \Rightarrow$ La opción D es cierta.

11. Si U, V son subespacios vectoriales de $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R})$, $U \cap V$ verifica: A) La suma de dos elementos de $U \cap V$ pertenece a $U \cap V$; B) El producto de un número real por un elemento de $U \cap V$ está en $U \cap V$; C) Puede ser vacía; D) $(U \cap V, +\mathbb{R})$ es subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R})$.

¿Está en $U \cap V$ la suma de dos elementos de $U \cap V$?.

Los elementos de la intersección pertenecen a ambos conjuntos, por tanto:

$$\text{Si } \bar{x}, \bar{y} \in U \cap V \Rightarrow \begin{cases} \bar{x} \in U, \bar{x} \in V \\ \bar{y} \in U, \bar{y} \in V \end{cases}$$

$$\text{por ser } U, V \text{ subespacios } \Rightarrow \begin{cases} \bar{x}+\bar{y} \in U \\ \bar{x}+\bar{y} \in V \end{cases} \Rightarrow \bar{x}+\bar{y} \in U \cap V \Rightarrow \text{Es correcta A.}$$

¿Está en $U \cap V$ el producto de un número real por un elemento de $U \cap V$?.

Si λ es un número real cualquiera, y $\bar{x} \in U \cap V$, se verifica que

$$\begin{cases} \bar{x} \in U \Rightarrow \lambda\bar{x} \in U \\ \bar{x} \in V \Rightarrow \lambda\bar{x} \in V \end{cases} \Rightarrow \lambda\bar{x} \in U \cap V \Rightarrow \text{Es correcta B.}$$

$\Rightarrow$ La C es falsa porque $U \cap V$, al menos, contiene el elemento neutro.

$\Rightarrow$ Es correcta D por serlo A y B.

12. Si U, V son subespacios vectoriales de $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R})$, $U \cup V$ verifica: A) La suma de dos elementos de $U \cup V$ siempre pertenece a $U \cup V$; B) El producto de un número real por un elemento de $U \cup V$ siempre está en $U \cup V$; C) $(U \cup V, + \mathbb{R})$ es subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^n, +, \mathbb{R})$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Para ver que una afirmación no es cierta es suficiente encontrar un ejemplo en que dicha afirmación no sea cierta.

Para ver que la suma de dos elementos de $U \cup V$ puede no estar en $U \cup V$, construyamos el siguiente ejemplo:

Si consideramos el subespacio U de $\mathbb{R}^2$ formado por los vectores de la recta $x_1 = 0$, y el subespacio V de $\mathbb{R}^2$ formado por los vectores de la recta $x_1 = x_2$, bisectriz del primer cuadrante, ocurre que, $\begin{cases}(0,5) \in U \Rightarrow (0,5) \in U \cup V \\ (3,3) \in V \Rightarrow (3,3) \in U \cup V\end{cases}$, pero el vector suma $(3, 8) \notin U \cup V$, ya que no tiene la primera coordenada 0, ni ambas coordenadas iguales.

En general, $U \cup V$ no es subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R})$ aunque lo sean U y V.

$\Rightarrow$ Las opciones A y C son falsas.

❖ Para demostrar que una afirmación es correcta hay que demostrarla, no es suficiente que sea cierta en un ejemplo concreto.

La opción B es correcta.

Demostración:

Los vectores de $U \cup V$ pertenecen a U o pertenecen a V, es decir,

$\begin{cases}\text{Si } \bar{x} \in U \Rightarrow \lambda\bar{x} \in U \\ \text{Si } \bar{x} \in V \Rightarrow \lambda\bar{x} \in V\end{cases} \Rightarrow \lambda\bar{x} \in U \cup V$, porque está en U o está en V, que es lo que queríamos demostrar.

En el ejemplo anterior, los elementos de $U \cup V$ son pares (x_1, x_2) tales que $x_1 = 0$ ó $x_1 = x_2$.

Si $\bar{x} = (x_1, x_2) \in U \Rightarrow \lambda \bar{x} \in U$ porque $\lambda (0, x_2) = (0, \lambda x_2)$, que tiene su primera coordenada 0.

Si $\bar{x} = (x_1, x_2) \in V \Rightarrow \lambda \bar{x} \in V$ porque $\lambda (x_1, x_2) = (\lambda x_1, \lambda x_2)$, que tiene sus dos coordenadas iguales si $x_1 = x_2$.

13. El subconjunto $U = \{f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \,/\, f(x) = a\text{sen}x + b\cos x\}$ de las funciones reales, siendo $a, b \in \mathbb{R}$ y un ángulo fijo x, verifica: A) La suma de dos elementos de U pertenece a U ; B) $(U, +)$ no es subgrupo del grupo que forman las funciones reales con la operación de sumar; C) $(U, +, \mathbb{R})$ es subespacio vectorial de $(\mathbb{R}^2, +, \mathbb{R})$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Los elementos de U son de la forma $f(x) = a\text{sen}x + b\cos x$.

¿La suma de dos elementos de U está en U?.

Si tomamos dos elementos cualesquiera: $f_1(x) = a_1\text{sen}x + b_1\cos x$ y $f_2(x) = a_2\text{sen}x + b_2\cos x$, y hacemos su suma:

$$f_1(x) + f_2(x) = a_1\text{sen}x + b_1\cos x + a_2\text{sen}x + b_2\cos x = \\ = (a_1 + a_2)\text{sen}x + (b_1 + b_2)\cos x \in U$$

$\Rightarrow$ La opción A es cierta, $(U, +)$ es subgrupo del grupo que forman las funciones reales con la operación de sumar, y la opción B es falsa.

¿La multiplicación de un elemento de U por un escalar está en U?.

Sí. porque si $\alpha \in \mathbb{R}$ $\alpha(a\text{sen}x + b\cos x) = \alpha a\text{sen}x + \alpha b\cos x \in U$ porque αa y αb son números reales.

$\Rightarrow$ La opción C correcta.

Ejercicios relativos a:

"Cuándo un sistema de vectores genera un espacio vectorial."

1. El vector (1, 0, 0) genera el siguiente subespacio de $\mathbb{R}^3$: A) Eje de las x_1; B) $\{(x_1, x_2, x_3)/x_2 = x_3 = 0\}$; C) $\{(x_1, x_2, x_3)/x_1 \neq 0,\ x_2 = x_3 = 0\}$; D) Ninguno de las anteriores.

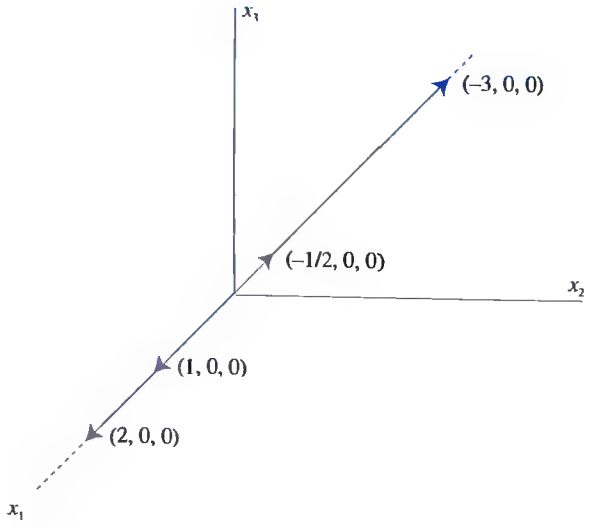
Las combinaciones lineales posibles son:

$$\alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ para cualquier } \alpha \text{ real.}$$

Cualquiera de estos vectores pertenece al eje de las x_1, independientemente del valor de α, que puede ser $0 \Rightarrow$ Son correctas las opciones A y B, es falsa la C.

❖ Las únicas combinaciones lineales que se pueden formar con un vector único son multiplicaciones de un vector por un escalar.

❖ Los vectores obtenidos son combinaciones lineales del vector (1, 0, 0), y, gráficamente están representados por el vector dado, más grande o más pequeño, cambiado de sentido o no.



(2, 0, 0) = 2 (1, 0 , 0)
(–1/2, 0, 0) = –1/2 (1, 0 ,0)
(–3, 0, 0) = –3 (1, 0, 0)

2. En $\mathbb{R}^3$ los subespacios que genera un vector dado son: A) Las rectas que pasan por el origen y contienen a dicho vector; B) El propio vector; C) No genera ningún subespacio; D) Ninguna de las anteriores.

Es correcta la opción A.

Una recta que pasa por el origen y contiene el vector (x, ax) tiene por ecuación $y = ax$, siendo a un número real dado.

Los vectores que están en ella son de la forma $\lambda(x, ax)$, y verifican

$$\lambda_1(x,ax)+\lambda_2(x,ax)=(\lambda_1+\lambda_2)(x,ax) \text{ y } \alpha\big(\lambda(x,ax)\big)=(\alpha\lambda)(x,ax).$$

Si $U=\{\bar{x}\}$, $(U,+)$ no es grupo porque $\bar{x}+\bar{x}=2\bar{x}\notin U \Rightarrow$ La opción B es falsa.

$\Rightarrow$ Las opciones C y D son falsas.

❖ U es subespacio vectorial de $V \Leftrightarrow \begin{cases} \forall \overline{u}, \overline{v} \in U \Rightarrow \overline{u} * \overline{v} \in U \\ \text{y} \\ \forall \overline{u} \in U, \forall \lambda \in \mathbb{R} \Rightarrow \lambda \overline{u} \in U \end{cases}$ siendo U un subconjunto no vacío de un espacio vectorial V.

3. Los vectores obtenidos como combinación lineal de (1, 0, 0) y (0, 1, 0) pertenecen a: A) Plano que determinan los ejes x_1 y x_2; B) $\{(x_1, x_2, x_3)/x_3 = 0\}$; C) $\{(x_1, x_2, x_3)/x_1 = x_2\}$; D) Pueden ser cualquiera de $\mathbb{R}^3$.

Todas las combinaciones lineales que se pueden formar con los vectores dados son:

$$\alpha\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\0\\0\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\\beta\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\0\end{pmatrix}.$$

$(\alpha, \beta, 0)$ son vectores de $\mathbb{R}^3$ donde cada una de las dos primeras coordenadas puede tomar cualquier valor (no es necesario que sean iguales), y la tercera ha de ser necesariamente 0, es decir, sólo son correctas las opciones A y B.

❖ Los vectores del plano que determinan los ejes x_1 y x_2 sólo tienen que cumplir $x_3 = 0$.

4. Es posible escribir el vector (2, 3, 0) como combinación lineal de: A) (0, 0, 1) y (0, 1, 0); B) (1, 0, 0) y (0, 1, 0); C) (1, 0, 0) y (0, 0, 1); D) No es posible escribirlo como combinación lineal de ninguno de los pares anteriores.

¿De cuántas formas es posible escribir (2, 3, 0) *como combinación lineal de* (1, 0, 0) *y* (0, 1, 0)*?*.

Sólo es posible la combinación $\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}$ $\Rightarrow$ Es correcta la opción B.

Todas las demás son falsas:

¿De cuántas formas es posible escribir $(\alpha, \beta, 0)$ *como combinación lineal de* $(1, 0, 0)$ *y* $(0, 1, 0)$*?.*

La única descomposición posible de $(\alpha, \beta, 0)$ como combinación lineal de $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$ es:

$$\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ 0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}.$$

¿Es posible escribir $(2, 3, 0)$ *como combinación lineal de* $(0, 0, 1)$ *y* $(0, 1, 0)$*?.*

La opción A no es posible porque no existen α, β, números reales, que verifiquen $\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix}$, ya que, el sistema $\begin{cases}2 = 0\alpha + 0\beta\\ 3 = 0\alpha + \beta\\ 0 = \alpha + 0\beta\end{cases}$ no tiene solución; no existen α, β, que hagan $2 = 0\alpha + 0\beta = 0$.

¿Es posible escribir $(2, 3, 0)$ *como combinación lineal de* $(1, 0, 0)$ *y* $(0, 0, 1)$*?.*

La opción C no es posible porque no existen α, β, números reales, que verifiquen $\begin{pmatrix}2\\ 3\\ 0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}0\\ 0\\ 1\end{pmatrix}$, ya que el sistema $\begin{cases}2 = \alpha + 0\beta\\ 3 = 0\alpha + 0\beta\\ 0 = 0\alpha + \beta\end{cases}$ no tiene solución; no existen α, β, que hagan $3 = 0\alpha + 0\beta = 0$.

❖ Para expresar que cualquier vector del subespacio que forman los vectores del plano que contiene los ejes x_1 y x_2 de $\mathbb{R}^3$ es una combinación lineal de $(1, 0, 0)$ y $(0, 1, 0)$, es decir, que dicho subespacio está generado por $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$, se utiliza la notación $\langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle$.

5. Los coeficientes de la combinación lineal que expresa el vector (2, 3, 0) en función de (1, 1, 0) y (0, –1/2, 0) son: A) 2,2; B) 1,4; C) 2,–2; D) Ninguno de los anteriores.

Es correcta la opción C y falsas las otras, es muy fácil comprobar que

$$\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0\\-1/2\\0\end{pmatrix}.$$

Se pueden encontrar directamente los coeficientes en la combinación lineal resolviendo el sistema de ecuaciones obtenido al igualar coordenada a coordenada en la siguiente expresión:

$$\begin{pmatrix}2\\3\\0\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\-1/2\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}2=\alpha\\3=\alpha-\dfrac{\beta}{2}\\0=0\alpha+0\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}2=\alpha\\3=2-\dfrac{\beta}{2}\end{cases}\Rightarrow\beta=-2.$$

❖ En los ejercicios anteriores hemos generado el vector (2, 3, 0) como combinación lineal de vectores de $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$ y como combinación lineal de vectores de $\{(1, 1, 0), (0, -1/2, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$. Cualquier vector de la forma $(\alpha, \beta, 0)$, es decir, que es del subespacio $x_3 = 0$ se puede generar de más de una manera.

❖ Un sistema de generadores de un subespacio no es único.

6. Son ciertas las siguientes relaciones entre subespacios: A) $\langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle = \langle(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\rangle$; B) $\langle(1, 1, 0), (0, -1/2, 0)\rangle = \langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle$; C) $\langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle = \langle(1, 1, 0)\rangle$; D) Ninguna de las anteriores.

¿Qué subespacio genera $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0)\}$*?.*

$\langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / (x_1, x_2, x_3) = \alpha(1, 0, 0) + \beta(0, 1, 0)\}$, siendo α, β números reales cualesquiera.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \Leftrightarrow x_3 = 0. \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

La única condición que deben cumplir las coordenadas de $\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$ es: $x_3 = 0$, es decir, la ecuación cartesiana de $\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$ es: $x_3 = 0$.

La ecuación $x_3 = 0$ es equivalente (define el mismo conjunto de vectores) a

$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = 0 \end{cases}$, que son las ecuaciones paramétricas de $\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0) \rangle$.

¿Qué subespacio genera $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$*?*.

$$\langle (1,0,0),(0,1,0),(0,0,1) \rangle =$$

$$\{(x_1,x_2,x_3) \in \mathbb{R}^3 / (x_1,x_2,x_3) = \alpha(1,0,0) + \beta(0,1,0) + \gamma(0,0,1)\}$$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \Leftrightarrow \text{ Las coordenadas de} \\ x_3 = \gamma \end{cases}$$

$\langle (1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$ son independientes y definen todo $\mathbb{R}^3$, es decir, no hay ecuaciones cartesianas.

¿Qué subespacio genera $\{(1, 1, 0), (0, -1/2, 0)\}$*?*.

$\langle (1, 1, 0), (0, -1/2, 0) \rangle = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / (x_1, x_2, x_3) = \alpha(1, 1, 0) + \beta(0, -1/2, 0)\}$ siendo $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ -1/2 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha - \dfrac{\beta}{2}. \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

La única condición que deben cumplir las coordenadas de $\langle(1,\ 1,\ 0),\ (0,\ -1/2,\ 0)\rangle$ es $x_3 = 0$, que es su ecuación cartesiana.

¿Qué subespacio genera $\{(1, 1, 0)\}$*?*.

$\langle(1, 1, 0)\rangle = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / (x_1, x_2, x_3) = \alpha(1, 1, 0)\}$

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_2 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$, que son las ecuaciones cartesianas de $\langle(1, 1, 0)\rangle$.

❖ Tienen las mismas ecuaciones cartesianas $\langle(1, 0, 0), (0, 1, 0)\rangle$ y $\langle(1,\ 1,\ 0),\ (0,\ -1/2,\ 0)\rangle \Rightarrow$ Sólo es correcta la opción B.

7. El vector (2, 3, 2) es combinación lineal de los siguientes vectores: A) (1, 1, 1), (2, 0, 2) y (3, 4, 3); B) (1, 1, 1) y (3, 4, 3); C) (2, 0, 2) y (3, 4, 3); D) No se puede escribir como combinación lineal de los conjuntos de vectores dados.

Se trata de encontrar números reales α, β, γ, que verifiquen

$$\begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ 2 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 3 \\ 4 \\ 3 \end{pmatrix}$$, es decir, de resolver el sistema $$\begin{cases} 2 = 1\alpha + 2\beta + 3\gamma \\ 3 = 1\alpha + 0\beta + 4\gamma. \\ 2 = 1\alpha + 2\beta + 3\gamma \end{cases}$$

Las ecuaciones primera y tercera son iguales y se puede prescindir de una de las dos, el sistema a resolver es: $\begin{cases} 2 = 1\alpha + 2\beta + 3\gamma \\ 3 = 1\alpha + 0\beta + 4\gamma \end{cases}$, que tiene muchas soluciones.

Aunque algunas soluciones, como $(\alpha,\ \beta,\ \gamma) = (-1,\ 0,\ 1)$, se ven de forma inmediata, hay muchas más que se pueden obtener al resolver el sistema:

$$\begin{cases} 2 = 1\alpha + 2\beta + 3\gamma \\ 3 = 1\alpha + 0\beta + 4\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2 - \alpha = 2\beta + 3\gamma \\ 3 - \alpha = 4\gamma \end{cases}$$, que dará una solución para cada valor de α.

Si $\alpha = -1$ se obtiene $(\alpha, \beta, \gamma) = (-1, 0, 1)$, y podemos afirmar que son ciertas las opciones A y B.

Para comprobar si es cierta la opción C, repetimos el proceso con los vectores que figuran en ella:

$$\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix}3\\4\\3\end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases}2 = 2\lambda + 3\mu\\3 = 4\mu\\2 = 2\lambda + 3\mu\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}2 = 2\lambda + 3\mu\\3 = 4\mu\end{cases} \Leftrightarrow \mu = \frac{3}{4}; \lambda = -\frac{1}{8}$$

$(2,3,2) = -\frac{1}{8}(2,0,2) + \frac{3}{4}(3,4,3) \Rightarrow$ También es cierta la opción **C**.

❖ Las conclusiones que podemos sacar son:

a) Los vectores (1, 1, 1), (2, 0, 2) y (3, 4, 3) son linealmente dependientes.

b) Se puede generar el mismo vector con distintos vectores de un sistema cuando dicho sistema es linealmente dependiente.

c) Se puede interpretar geométricamente como que el vector (2, 3, 2) está en el mismo plano que los vectores (1, 1, 1), (2, 0, 2) y (3, 4, 3).

8. Sabiendo que $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ son vectores de $\mathbb{R}^3$ linealmente dependientes, es cierto que: A) Al menos uno se puede escribir como combinación lineal de los otros (con ambos coeficientes distintos de 0); B) Cualquiera de los tres es combinación lineal de los otros dos (con ambos coeficientes distintos de 0); C) El subespacio de $\mathbb{R}^3$ que generan $\vec{x}, \vec{y}, \vec{z}$ sólo se puede generar con dos vectores; D) Ninguna de las anteriores.

La opción A es falsa, el vector elegido puede depender sólo de uno de los otros dos.

Ejemplo: El sistema {(1, 0, 0), (0, 1, 0), (2, 0, 0)} es linealmente dependiente.

(2, 0, 0) = 2 (1, 0, 0) + 0 (0, 1, 0) es la única forma posible de escribir la dependencia lineal de (2, 0, 0) de los otros dos vectores.

$$(1,0,0) = 0\,(0,1,0) + \frac{1}{2}(2,0,0)$$

(0, 1, 0) no se puede poner como combinación lineal de los otros dos.

La opción B es falsa:

(0, 1, 0) no se puede escribir como combinación lineal de los otros dos (con ambos coeficientes distintos de 0).

La opción C también es falsa.

Ejemplo: El sistema {(1, 0, 0), (3, 0, 0), (2, 0, 0)} es linealmente dependiente y todos sus elementos dependen de uno:

$$\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix}3\\0\\0\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Es cierta la opción D.

9. $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$ es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ que puede ser generado por: A) {(1, 0, −1)}; B) {(1, 0, −1), (0, 1, −1)}; C) {(0, 1, 0)}; D) Ninguno de los conjuntos anteriores.

Los vectores de U se pueden escribir: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\x_2\\-x_1-x_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}x_1\\0\\-x_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}0\\x_2\\-x_2\end{pmatrix} =$

$= x_1\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, por tanto, el subespacio U está generado por $S = \{(1, 0, -1),$ $(0, 1, -1)\}$, es decir, $U = \langle (1, 0, -1), (0, 1, -1) \rangle \Rightarrow$ La opción B es correcta.

Los vectores de $\langle(1, 0, -1)\rangle$ son de la forma $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$, es decir, sólo generarían los vectores de U cuya segunda coordenada es 0 y la tercera opuesta de la primera, pero no aquellos cuya segunda coordenada es distinta de 0, o la tercera no es la opuesta de la primera $\Rightarrow$ La opción A es incorrecta.

Los vectores de $\langle(0, 1, 0)\rangle$ son de la forma $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, que, en general, no serán vectores de U porque no verificarán $0 + x_2 + 0 = 0 \Rightarrow$ La opción C es incorrecta.

10. El subespacio del ejercicio anterior $U = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 + x_3 = 0\}$, puede ser generado por: A) $S_1 = \{(0, 1, -1), (2, 0, -2)\}$; B) $S_2 = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1). (1, 1, -2)\}$; C) $S_3 = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, 1, -2), (3, 0, -3)\}$; D) $S_4 = \{(1, 1, -2), (3, 0, -3)\}$.

En el ejercicio anterior vimos que el subespacio U puede ser generado por $S = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$.

Al pasar de S a S_1, el vector $(1, 0, -1)$ ha sido sustituido por $(2, 0, -2)$.

$\begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} = 2 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ $(2, 0, -2)$ depende linealmente de $(1, 0, -1)$, y es distinto del vector nulo $\Rightarrow$ S_1 también genera S.

Al pasar de S a $S_2 = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, 1, -2)\}$ se ha añadido el vector $(1, 1, -2)$.

$\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}$, es decir, se ha añadido un vector que depende linealmente de otros vectores del sistema de generadores $\Rightarrow$ S_2 también genera S.

En $S_3 = \{(1, 0, -1), (0, 1, -1), (1, 1, -2), (3, 0, -3)\}$ el vector $\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ S_3 es equivalente a S_2 y también genera S. Se ha incorporado el vector $(3, 0, -3)$ sin que varíe el espacio generado.

Para pasar de S_3 a $S_4 = \{(1, 1, -2), (3, 0, -3)\}$, se quitan los vectores $\begin{pmatrix}1\\0\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$

y $\begin{pmatrix}0\\1\\-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\end{pmatrix}-\frac{1}{3}\begin{pmatrix}3\\0\\-3\end{pmatrix}$ sin que varíe el espacio generado por S_3.

$\Rightarrow$ Son ciertas todas las opciones.

11. Si $S_1 = \{(1, 2, 1), (1, 3, 2)\}$ genera el subespacio $\langle S_1\rangle$, y $S_2 = \{(1, 1, 0), (1, 2, 1)\}$ el subespacio $\langle S_2\rangle$, se verifica: A) $\langle S_1\rangle \subseteq \langle S_2\rangle$; B) $\langle S_1\rangle \supseteq \langle S_2\rangle$; C) $\langle S_1\rangle = \langle S_2\rangle$; D) Ninguna de las anteriores.

¿Cómo son los vectores de $\langle S_1\rangle$?.

Los vectores de $\langle S_1\rangle$ son de la forma $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\3\\2\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x_1=\alpha+\beta\\x_2=2\alpha+3\beta\\x_3=\alpha+2\beta\end{cases}$,

que son sus ecuaciones paramétricas.

¿Cómo se obtienen las ecuaciones cartesianas?.

Eliminando los parámetros α, β. Para ello es suficiente observar que el segundo miembro de la segunda ecuación es la suma de los segundos miembros de la primera y la tercera, y, por tanto, también hay esa relación entre los primeros miembros.

La ecuación cartesiana obtenida es $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

¿Cómo son los vectores de $\langle S_2 \rangle$?.

Los vectores de $\langle S_2 \rangle$ son de la forma $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = \alpha + 2\beta \\ x_3 = \beta \end{cases}$, que

son sus ecuaciones paramétricas.

¿Cómo se obtienen las ecuaciones cartesianas?.

Sustituyendo $x_3 = \beta$ en $\begin{cases} x_1 = \alpha + \beta \\ x_2 = \alpha + 2\beta \end{cases}$ se obtiene $\begin{cases} x_1 = \alpha + x_3 \\ x_2 = \alpha + 2x_3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = \alpha \\ x_2 - 2x_3 = \alpha \end{cases}$

$\Rightarrow x_1 - x_3 = x_2 - 2x_3 \Leftrightarrow x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

Los dos sistemas de ecuaciones son equivalentes, ya que, tras eliminar los parámetros α, β, dan lugar a la misma ecuación cartesiana: $x_1 - x_2 + x_3 = 0$.

$\Rightarrow$ Son correctas las opciones A, B y C.

12. Pertenecen al subespacio generado por $S_1 = \{(1, 2, 1), (1, 3, 2)\}$ del ejercicio anterior los vectores siguientes: A) (2, 3, 2); B) (2, 4, 2); C) $(0, a, -3a)$ con $a \neq 0$; D) $(0, a, -3a)$ con $a = 0$.

Es suficiente ver si sus coordenadas verifican, o no, la ecuación $x_1 - x_2 + x_3 = 0$:
$2 - 3 + 2 \neq 0 \Rightarrow (2, 3, 2) \notin \langle S_1 \rangle$.

Las coordenadas de (2, 4, 2) sí verifican la ecuación $x_1 - x_2 + x_3 = 0$:
$2 - 4 + 2 = 0 \Rightarrow (2, 4, 2) \in \langle S_1 \rangle$.

Las coordenadas de $(0, a, -3a)$ con $a \neq 0$ no verifican la ecuación $x_1 - x_2 + x_3 = 0$: $0 - a - 3a = -4a \neq 0$ si $a \neq 0 \Rightarrow (0, a, -3a) \notin \langle S_1 \rangle$.

Las coordenadas de $(0, a, -3a)$ si $a = 0$ son $(0, 0, 0)$, que sí verifican la ecuación $x_1 - x_2 + x_3 = 0$: $0 - 0 + 0 = 0 \Rightarrow (0, 0, 0) \in \langle S_1 \rangle$.

❖ Para el vector $(0, 0, 0)$ no es necesario comprobar si verifica las ecuaciones, ya que pertenece a todos los espacios vectoriales reales con las operaciones estándar por ser el elemento neutro de la suma.

$\Rightarrow$ Son ciertas las opciones B y D.

13. Dados los vectores $\overline{x} = (1, 4, -5, 2), \overline{y} = (1, 2, 3, -1) \in \mathbb{R}^4$, el vector $(1, 0, a, b)$ pertenece al subespacio generado por $\overline{x}, \overline{y}$ si: A) $a = 11, b = -4$; B) Para cualquier valor de a y b; C) Para $a = -2, b = 1$; D) Ninguna de las anteriores.

Para que el vector $(1, 0, a, b)$ pertenezca al subespacio generado por $\overline{x}, \overline{y}$ se debe poder escribir como combinación lineal de ambos, es decir, deben existir λ y μ reales, tales que:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ a \\ b \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 4 \\ -5 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

Para que dos vectores sean iguales, lo deben ser coordenada a coordenada; la expresión anterior da lugar al sistema de ecuaciones: $\begin{cases} 1 = \lambda + \mu \\ 0 = 4\lambda + 2\mu \\ a = -5\lambda + 3\mu \\ b = 2\lambda - \mu \end{cases}$, que está

formado por dos sistemas de ecuaciones independientes: $\begin{cases} 1=\lambda+\mu \\ 0=4\lambda+2\mu \end{cases}$ y

$\begin{cases} a=-5\lambda+3\mu \\ b=2\lambda-\mu \end{cases}$.

Las soluciones de $\begin{cases} 1=\lambda+\mu \\ 0=4\lambda+2\mu \end{cases}$ son $\lambda=-1;\ \mu=2$.

Al sustituir estos valores en $\begin{cases} a=-5\lambda+3\mu \\ b=2\lambda-\mu \end{cases}$ se obtiene $a=11;\ b=-4$.

$\Rightarrow$ Es válida la opción A.

14. El vector $(1, -2, k)$ pertenece al subespacio generado por $S_1 = \{(3, 0, -2), (2, -1, -5)\}$ si: A) $k = 0$; B) $k = -8$; C) k toma cualquier valor; D) k toma valores distintos a los anteriores.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ k \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 3 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -5 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 1=3\alpha+2\beta \\ -2=-\beta \\ k=-2\alpha-5\beta \end{cases}$$

Al resolver el sistema formado por las dos primeras ecuaciones $\begin{cases} 1=3\alpha+2\beta \\ -2=-\beta \end{cases}$ se obtiene la solución $\alpha=-1,\ \beta=2$.

Sustituyendo en la tercera ecuación los valores obtenidos $\alpha=-1,\ \beta=2 \Rightarrow k=-8$.

$\Rightarrow$ Es correcta la opción B.

Ejercicios relativos a:

"Independencia lineal, bases y dimensión de espacios vectoriales finitos."

1. Sabiendo que $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3,\bar{e}_4\}$ es una base de un espacio vectorial V, también son bases de V: A) $B_1=\{\bar{e}_1,\bar{e}_1+\bar{e}_2,\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3+\bar{e}_4\}$; B) $B_2=\{\bar{e}_1,\bar{e}_1+\bar{e}_2,\bar{e}_1-\bar{e}_2,\bar{e}_1+\bar{e}_3,\bar{e}_4\}$; C) $B_3=\{\bar{e}_1,\bar{e}_1+\bar{e}_2,\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3,\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3+\bar{e}_4\}$; D) Ninguna de las anteriores.

¿Son B_1, B_2 bases de V?.

Como la base B tiene cuatro vectores, la dimensión de V es cuatro, y como todas las bases tienen el mismo número de elementos, las opciones A y B son falsas (tienen tres y cinco, respectivamente).

¿Es B_3 base de V?.

Para que la opción C sea correcta, es suficiente comprobar que sus cuatro vectores son linealmente independientes:

Los cuatro vectores de B_3 son linealmente independientes:

$\bar{0}=\lambda\bar{e}_1+\mu(\bar{e}_1+\bar{e}_2)+\alpha(\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3)+\beta(\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3+\bar{e}_4)$ es una combinación lineal de los vectores de B_3 que genera el vector nulo.

Dicha expresión se puede escribir también como $\bar{0}=(\lambda+\mu+\alpha+\beta)\bar{e}_1+$ $+(\mu+\alpha+\beta)\bar{e}_2+(\alpha+\beta)\bar{e}_3+\beta\bar{e}_4$, que es una combinación lineal de los vecto-

ıes de la base B que genera el vector $\bar{0} \Rightarrow$ Todos los coeficientes de dicha combinación deben ser 0, es decir:

$$\begin{cases} \lambda+\mu+\alpha+\beta=0 \\ \mu+\alpha+\beta=0 \\ \alpha+\beta=0 \\ \beta=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \lambda=0 \\ \mu=0 \\ \alpha=0 \\ \beta=0 \end{cases} \Rightarrow \text{Los vectores de } B_3 \text{ forman base.}$$

$\Rightarrow$ C es cierta.

2. De entre las siguientes opciones, elíjase la correcta: A) $U=\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1+x_2+x_3=0\}$ no es espacio vectorial; B) El vector 1 forma una base del espacio vectorial $\mathbb{R}$; C) Existen espacios vectoriales de dimensión finita, distintos de cero, que no tienen bases; D) Ninguna de las anteriores.

¿U es un subespacio de $\mathbb{R}^3$?.

$U \neq \varnothing$ está contenido en $\mathbb{R}^3$. Si U es subespacio de $\mathbb{R}^3$, es un espacio vectorial $\subset \mathbb{R}^3$.

$\Rightarrow$ A es falsa porque la suma de dos elementos del conjunto pertenece al conjunto y el producto de un escalar por un elemento del conjunto pertenece al conjunto.

❖ Las dos condiciones anteriores se pueden comprobar conjuntamente:

Si (x_1, x_2, x_3), (x_1', x_2', x_3'), pertenecen al conjunto dado, $(x_1, x_2, x_3)+\alpha(x_1', x_2', x_3')$, pertenece al mismo conjunto:

$(x_1, x_2, x_3)+\alpha(x_1', x_2', x_3')=(x_1+\alpha x_1', x_2+\alpha x_2', x_3+\alpha x_3')$, que verifica:
$x_1+\alpha x_1'+x_2+\alpha x_2'+x_3+\alpha x_3'=(x_1+x_2+x_3)+\alpha(x_1', +x_2'+x_3')=0$.

¿El vector 1 *forma una base de* $\mathbb{R}$*?.*

La opción B es cierta porque $\mathbb{R}$ es de dimensión 1, y por tanto, cualquier vector distinto del nulo forma base.

¿Existen espacios vectoriales de dimensión finita, distintos de cero, que no tienen bases?.

La opción C es falsa, ya que contradice el teorema de la base.

La opción D es falsa porque es cierta B.

3. Sabiendo que $B = \{(1, 1, 1), (1, 1, 0), (1, 0, 0)\}$ es una base de $\mathbb{R}^3$ y que $\bar{v} = (3, 2, 1)$ respecto a la base canónica, se verifica que las coordenadas $\bar{v}$ respecto a B son: A) (1, 1, 1) respecto a B; B) (–1, 1, 1); C) (1, –1, 1) respecto a B; D) Ninguna de las anteriores.

¿Cuáles son los coeficientes de (3, 2, 1) *en la combinación lineal?.*

$$\begin{pmatrix}3\\2\\1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}3=\alpha+\beta+\gamma\\2=\alpha+\beta\\1=\alpha\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\beta=1\\\gamma=1\end{cases}\Rightarrow \text{Es cierta la opción A.}$$

4. Sabiendo que $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3,\bar{e}_4\}$ y $B'=\{\bar{e}_1',\bar{e}_2',\bar{e}_3',\bar{e}_4'\}$ son dos bases de $\mathbb{R}^4$, tales que, $\bar{e}_1' = \bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3, \bar{e}_2' = \bar{e}_2, \bar{e}_3' = \bar{e}_2-\bar{e}_3, \bar{e}_4' = \bar{e}_2-4\bar{e}_3-2\bar{e}_4$, y que las coordenadas de $\bar{v}\in\mathbb{R}^4$ son (2, –1, 0, 1) respecto a B', se verifica que las coordenadas de $\bar{v}$ respecto a B son: A) (2, 1, 3, –2); B) (2, 2, –2, –2); C) (–2, –2, 2, 0); D) Ninguna de las anteriores.

Las coordenadas de $\bar{v}$ son (2,-1,0,1) respecto a $B' \Leftrightarrow 2\bar{e}_1' - 1\bar{e}_2' + 0\bar{e}_3' + 1\bar{e}_4' =$

$= 2(\bar{e}_1+\bar{e}_2+\bar{e}_3)-1\bar{e}_2+1(\bar{e}_2-4\bar{e}_3-2\bar{e}_4)=2\bar{e}_1+2\bar{e}_2-2\bar{e}_3-2\bar{e}_4 \Leftrightarrow$ Las coordenadas de $\bar{v}$ son (2, 2, –2, –2) respecto a B.

$\Rightarrow$ Es correcta la opción B.

5. Si $B=\{(1,1,0,0),(1,-1,0,0),(0,0,1,1),(0,0,1,-1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^4$, se verifica que, las coordenadas en la base B del vector $\overline{y}$, que en la base canónica es $\overline{y}=(y_1, y_2, y_3, y_4)$, son: A) $\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}, y_3+y_4, y_3-y_4\right)$;

B) $(y_1+y_2, y_1-y_2, y_3+y_4, y_3-y_4)$; C) $\left(\frac{y_1+y_2}{2}, \frac{y_1-y_2}{2}, \frac{y_3+y_4}{2}, \frac{y_3-y_4}{2}\right)$;

D) Ninguna de las anteriores.

El vector $\overline{y}$ referido a la base B es $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \delta\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

Igualando coordenada a coordenada se obtienen dos sistemas que se resuelven independientemente:

$$\left.\begin{aligned} y_1 &= \alpha+\beta \\ y_2 &= \alpha-\beta \end{aligned}\right\} \Rightarrow \alpha=\frac{y_1+y_2}{2}, \beta=\frac{y_1-y_2}{2} \quad \text{y}$$

$$\left.\begin{aligned} y_3 &= \delta+\gamma \\ y_4 &= \delta-\gamma \end{aligned}\right\} \Rightarrow \delta=\frac{y_3+y_4}{2}, \gamma=\frac{y_3-y_4}{2} \Rightarrow \text{Es correcta la opción C.}$$

6. Si $\wp_2$ es el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor que 3 de una variable, se verifica que $S=\{x^2, x^2+x\}$: A) Es un sistema generador de $\wp_2$; B) S es un sistema libre; C) S es una base de dicho espacio; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Cualquier elemento de $\wp_2$ es de la forma ax^2+bx+c, $\forall a, b, c \in \mathbb{R}$.

¿S es un sistema generador de $\wp_2$?.

Si $\{x^2, x^2+x\}$ fuera generador, se verificaría $ax^2+bx+c=\alpha x^2+\beta(x^2+x)$, es decir, los valores de a, b, c se podrían obtener siempre de la ecuación $ax^2+bx+c=\alpha x^2+\beta(x^2+x)$ en función de α, β.

Pero al igualar los coeficientes de las variables que tienen el mismo grado en ambos miembros quedaría siempre $c = 0$.

Por tanto $\{x^2, x^2 + x\}$, sólo genera los vectores de $\wp_2$ de la forma $ax^2 + bx$, y la opción A es falsa.

¿S es un sistema un sistema libre?.

Tomemos la combinación lineal de sus vectores $\alpha x^2 + \beta(x^2 + x) = 0x^2 + 0x + 0$ $ax^2 + \beta(x^2 + x) = x^2(\alpha + \beta) + \beta x = 0x^2 + 0x + 0$; igualando los coeficientes de x^2, x y el término independiente en ambos miembros, se obtiene $\alpha = 0$, $\beta = 0 \Rightarrow$ La opción B es cierta.

¿S es base de $\wp_2$?.

La opción C no puede ser cierta porque $\{x^2, x^2 + x\}$ no es generador de $\wp_2$.

7. Si $\wp_2$ es el espacio vectorial real de los polinomios de grado menor que 3 y una variable, $S = \{x^2, x^2 + x, 2x, 3\}$ es: A) Un sistema generador de $\wp_2$; B) Un sistema libre; C) Una base de dicho espacio; D) Ninguna de las opciones anteriores.

¿S es un sistema generador de $\wp_2$?.

Si $S = \{x^2, x^2 + x, 2x, 3\}$ es generador, se verificará que $ax^2 + bx + c$ se puede escribir como combinación lineal de los elementos de S, es decir, $ax^2 + bx + c = \alpha x^2 + \beta(x^2 + x) + \delta(2x) + \gamma 3 = (\alpha + \beta)x^2 + (\beta + 2\delta)x + 3\gamma$.

Al igualar los coeficientes de las variables que tienen el mismo grado en ambos miembros se obtiene:

$$\begin{cases} \alpha + \beta = a \\ \beta + 2\delta = b \\ 3\gamma = c \end{cases}$$, que muestra claramente que se pueden obtener los valores de a, b, c a partir de los valores de α, β, δ, $\gamma \Rightarrow$ La opción A es correcta.

¿S es un sistema un sistema libre?.

Si S es un sistema libre, cualquier combinación lineal que genere el neutro de $\wp_2$ tiene que tener coeficientes nulos.

Si $\alpha x^2 + \beta(x^2 + x) + \delta(2x) + \gamma 3 = (\alpha + \beta)x^2 + (\beta + 2\delta)\, x + \gamma 3 = 0x^2 + 0x + 0$, igualando los coeficientes de x^2, x y el término independiente en ambos miembros, se obtiene $\begin{cases} \alpha+\beta=0 \\ \beta+2\delta=0 \\ \gamma 3=0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \alpha=-\beta=2\delta \\ \gamma=0 \end{cases} \Rightarrow$ La opción B es falsa porque $\alpha, \beta, \delta, \gamma$ no tienen que ser todos 0 necesariamente.

¿S es base de $\wp_2$?.

La opción C no puede ser cierta porque S no es libre.

8. Si $S = \{P(x), P'(x), P''(x), P'''(x)\}$, es una base del espacio vectorial de polinomios reales de grado menor o igual que 3 y una variable, siendo $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$, se verifica que las coordenadas de $Q(x) = x^3 + 4x^2 + 9x + 10$ respecto a la base S son: A) (1, 0, 1, 0); B) (1, 1, 1, 1); C) Cualquiera de las dos anteriores; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Como S es base del espacio vectorial dado, cualquier vector de dicho espacio es una combinación lineal de sus elementos, y los coeficientes en dicha combinación son sus coordenadas.

❖ $S = \{P(x), P'(x), P''(x), P'''(x)\} = \{x^3 + x^2 + x + 1, 3x^2 + 2x + 1, 6x + 2, 6\}$,

porque $P(x) = x^3 + x^2 + x + 1$ y $P'(x) = 3x^2 + 2x + 1, P''(x) = 6x + 2, P'''(x) = 6$

son las derivadas sucesivas de $P(x)$.

¿Cuáles son las coordenadas de $Q(x)$ respecto a S?.

$$x^3 + 4x^2 + 9x + 10 = \alpha(x^3 + x^2 + x + 1) + \beta(3x^2 + 2x + 1) + \delta(6x + 2) + 6\gamma =$$
$$= \alpha x^3 + x^2(\alpha + 3\beta) + x(\alpha + 2\beta + 6\delta) + (\alpha + \beta + 2\delta + 6\gamma).$$

Al igualar los coeficientes de las variables que tienen el mismo grado en ambos miembros se obtiene:

$$\begin{cases}\alpha=1\\ \alpha+3\beta=4\\ \alpha+2\beta+6\delta=9\\ \alpha+\beta+2\delta+6\gamma=10\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\ \beta=1\\ \delta=1\\ \gamma=1\end{cases}\Rightarrow$$ La opción B es correcta, y las opciones A y D falsas.

La opción C es falsa porque las coordenadas de un vector respecto a una base son únicas.

9. Cuando el vector (0, 6, 9) sustituye en $B=\{(1, 2, 1,), (-1. 0. 2), (0, 2. 3)\}$ a alguno de los vectores siguientes, el conjunto resultante es base de $\mathbb{R}^3$ si el sustituido es: A) (1, 2, 1); B) (–1, 0, 2); C) (0, 2, 3); D) No es posible obtener una base a partir de los vectores dados.

¿Cuántos vectores independientes hay en B?.

Entre los vectores dados se ve muy claro que hay dos independientes, y el tercero depende de ellos:

$$\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}=-\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}.$$

Para que formen base de $\mathbb{R}^3$ hay que añadir un vector que no sea combinación lineal de los dos elegidos como independientes.

(0, 6, 9) es una combinación lineal de los tres vectores de *B:*

$$\begin{pmatrix}0\\6\\9\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

Cada vector de B es combinación lineal de los otros dos vectores de $B \Rightarrow (0, 6, 9)$ es combinación lineal de dos cualesquiera de los vectores de B.

Ejemplo:

$$\begin{pmatrix}0\\6\\9\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}0\\2\\3\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}.$$

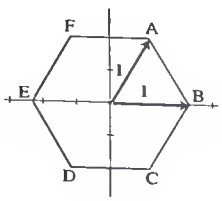
$\Rightarrow$ Sólo es correcta la opción D.

10. Si $ABCDEF$ es el hexágono regular de centro $O(0, 0)$ y $S=\{\overline{OA}, \overline{OB}\}$ es una base del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$; las coordenadas de $\overline{OC}, \overline{OD}, \overline{OE}, \overline{OF}$ respecto a S son: A) $\overline{OC}(1,1)$; $\overline{OD}(1,0)$; $\overline{OE}(0,-1)$; $\overline{OF}(1,-1)$; B) $\overline{OC}(-1,1)$; $\overline{OD}(-1,0)$; $\overline{OE}(0,-1)$; $\overline{OF}(1,-1)$; C) $\overline{OC}(1,-1)$; $\overline{OD}(-1,0)$; $\overline{OE}(0,1)$; $\overline{OF}(1,1)$; D) Ninguna de las anteriores.

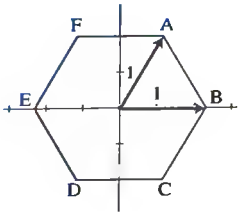
❖ Para ver si es cierta cada una de las opciones dadas tenemos dos posibilidades, una es comprobar si son correctas, o no, las coordenadas dadas, y otra es calcular dichas coordenadas y comparar con las dadas en las distintas opciones. Éste es el procedimiento más conveniente cuando hay que analizar varias opciones.

Escribamos cada uno de los vectores dados como combinación lineal de los elementos de S:

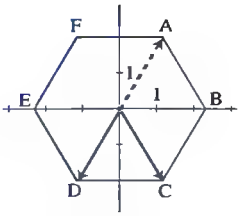
$$\overline{OA}=1\overline{OA}+0\overline{OB} \Leftrightarrow \overline{OA}=(1,0)$$



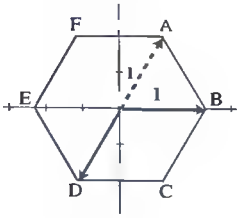
$\overline{OB} = 0\overline{OA} + 1\overline{OB} \Leftrightarrow \overline{OB} = (0,1)$



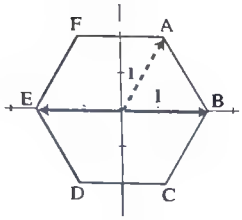
$\overline{OC} = -\overline{OA} + 1\overline{OB} \Leftrightarrow \overline{OC} = (-1,1)$



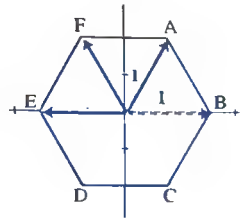
$\overline{OD} = -\overline{OA} + 0\overline{OB} \Leftrightarrow \overline{OD} = (-1,0)$



$\overline{OE} = 0\overline{OA} - 1\overline{OB} \Leftrightarrow \overline{OE} = (0,-1)$



$\overline{OF} = 1\overline{OA} - 1\overline{OB} \Leftrightarrow \overline{OF} = (1,-1)$



Al comparar con las distintas opciones, podemos concluir que sólo es válida la B.

11. Si $S = \{(2, 1. 3). (-1, 2, 3), (5, 5, 12), (0, 5, 9)\}$, es cierto que: A) S es base de $\mathbb{R}^3$; B) Existe una base de $\mathbb{R}^3$ que contiene al menos dos vectores de S; C) S contiene una base de $\mathbb{R}^3$; D) Ninguna de las anteriores.

¿Puede haber más de tres vectores independientes en $\mathbb{R}^3$?.

En $\mathbb{R}^3$ sólo puede haber 3 vectores linealmente independientes $\Rightarrow$ S no puede ser base porque tiene cuatro $\Rightarrow$ La opción A es falsa.

¿Los vectores (2, 1, 3), (–1, 2, 3) *son independientes?.*

$$\text{Si } \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \beta\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}0 = 2\alpha - \beta\\0 = \alpha + 2\beta\\0 = 3\alpha + 3\beta\end{cases} \Rightarrow \alpha = \beta = 0$$

$\Rightarrow$ La opción B es correcta.

¿Los vectores (5, 5, 12), (0, 5, 9), *son independientes de los otros dos?.*

De los cuatro vectores sólo hay dos independientes, ya que, los otros dos se pueden escribir como combinación lineal de los primeros:

$$\begin{pmatrix}0\\5\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix} \quad \text{y} \quad \begin{pmatrix}5\\5\\12\end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix}2\\1\\3\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-1\\2\\3\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ La opción C es falsa porque en S no hay tres vectores linealmente independientes.

❖ En capítulos posteriores dispondremos de herramientas más eficientes para calcular el número vectores independientes en un sistema dado.

12. Respecto a la base canónica el vector $\overline{v}$ es (2, 2, 2), $B_1 = \{(2, 0, 0), (0, 2, 0), (0, 0, 2)\}$ y $B_2 = \{(1, 1, 0), (0, 1, 1), (a, b, c)\}$ son bases de $\mathbb{R}^3$ tales que $\overline{v}$ tiene las mismas coordenadas respecto a ambas cuando (a, b, c) es: A) (–1, 0, –1); B) (1, 0, 1); C) (1, 1, 1); D) Ninguno de los vectores anteriores.

¿Coordenadas de $\overline{v}$ respecto a B_1?.

$$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}2\\0\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\0\\2\end{pmatrix}\Rightarrow$$ Sus coordenadas respecto a la base B_1 son (1, 1, 1).

¿Valores de (a, b, c) para que las coordenadas de $\overline{v}$ sean (1, 1, 1) respecto a B_2?.

Para que en la base B_2 tenga coordenadas (1, 1, 1), ha de cumplirse que

$$\begin{pmatrix}2\\2\\2\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}.$$

Al igualar componente a componente se obtiene el sistema:

$$\begin{cases}2=1+a\\2=1+1+b\Rightarrow(a,b,c)=(1,0,1)\Rightarrow\text{Es cierta la opción B.}\\2=1+c\end{cases}$$

13. Si *a, b, c* son tres números reales cualesquiera, es cierto que $B=\{(1,a,b),(0,1,c),(0,0,1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3$: A) Siempre; B) Sólo si $a = 1$, $b = 1$, $c = 1$; C) Nunca; D) Ninguna de las anteriores.

❖ La condición para que sea base de $\mathbb{R}^3$ es que tenga tres vectores linealmente independientes.

¿Cuándo son independientes los vectores de B?.

$$\text{Si }\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\a\\b\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}0\\1\\c\end{pmatrix}+\gamma\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}0=\alpha\\0=\alpha a+\beta\\0=\alpha b+\beta c+\gamma\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}0=\alpha\\0=\beta.\\0=\gamma\end{cases}$$

Los tres vectores son siempre linealmente independientes ⇒ Es cierta la opción A y falsas las demás.

Ejercicios relativos a:

"Relación entre subespacios de un espacio vectorial finito, dimensiones, bases, suma y suma directa."

1. Si $F = \{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 = x_3\}$, se verifica: A) F es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$; B) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 2)\}$ es una base de F; C) F no tiene base porque no es espacio vectorial; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Los elementos de F son ternas de números reales $(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3$, que verifican $x_1 + x_2 = x_3$, es decir, la tercera coordenada es la suma de su primera y su segunda coordenada.

Aplicación del teorema que caracteriza los subespacios vectoriales:

¿La suma de dos elementos de F es de F?.

$$(s_1,s_2,s_3) \in F \Leftrightarrow s_1 + s_2 = s_3 \quad \text{y} \quad (t_1,t_2,t_3) \in F \Leftrightarrow t_1 + t_2 = t_3;$$

$$(s_1,s_2,s_3) + (t_1,t_2,t_3) = (s_1 + t_1, s_2 + t_2, s_3 + t_3) \in F \text{ porque:}$$

$$(s_1 + t_1) + (s_2 + t_2) = (s_1 + s_2) + (t_1 + t_2) = s_3 + t_3.$$

¿El producto de un elemento de F por un número real es de F?.

$$\lambda(s_1,s_2,s_3) = (\lambda s_1, \lambda s_2, \lambda s_3) \in F; \ \lambda s_1 + \lambda s_2 = \lambda(s_1 + s_2) = \lambda s_3 \text{ porque } s_1 + s_2 = s_3.$$

$\Rightarrow$ La opción A es correcta

¿F tiene base?.

La opción C es falsa, por ser espacio vectorial (es subespacio de $\mathbb{R}^3$) finito distinto de $\{\bar{0}\}$ tiene base.

¿$\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 2)\}$ *es una base de F?.*

La opción B es falsa porque $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (1, 1, 2)\}$ contiene vectores que no son de *F*.

(1, 0, 0) y (0, 1, 0) no son de *F* porque no verifican que la tercera coordenada es suma de la primera y la segunda.

2. El espacio vectorial $F = \{(x_1\ x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 + x_2 = x_3\}$ del ejercicio anterior verifica: A) El elemento neutro de la suma estándar de vectores no pertenece a *F*; B) *F* es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ de dimensión dos; C) *F* no es espacio vectorial porque no puede haber ninguna base contenida en él; D) Ninguna de las anteriores.

¿El elemento neutro de la suma estándar de vectores no pertenece a F?.

Es evidente que (0, 0, 0) pertenece a *F* porque el elemento neutro siempre pertenece al espacio vectorial, pero además es muy fácil ver que $0 + 0 = 0$.

$\Rightarrow$ La opción A es falsa.

¿Se puede encontrar alguna base de F?.

Los elementos de *F* son de la forma $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, siendo α y β números reales cualesquiera, es decir, $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ genera *F*.

Como además (1, 0, 1) y (0, 1, 1) son dos vectores linealmente independientes, $\{(1, 0, 1), (0, 1, 1)\}$ es una base de *F*.

$\Rightarrow$ La opción B es cierta y la opción C es falsa.

3. Sabiendo que $V = \{(x_1, x_2, x_3) / x_2 = x_3\}$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$, es correcto decir: A) Todas sus bases están formadas por dos vectores; B) Hay una base de *V*

respecto a la cual las coordenadas de un vector de V son (2, 3); C) La dimensión de V es dos; D) Ninguna de las anteriores.

Los vectores de V son de la forma (λ, μ, μ), siendo λ, μ dos números reales cualesquiera, y se pueden expresar mediante la combinación lineal

$$\begin{pmatrix}\lambda\\ \mu\\ \mu\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}\Rightarrow\{(1,0,0),(0,1,1)\}$$ es un sistema de generadores de V.

Los vectores (1, 0, 0), (0, 1, 1) son linealmente independientes $\Rightarrow$ {(1, 0, 0), (0, 1, 1)} es base de $V \Rightarrow$ Son correctas las opciones A y C.

Decir que las coordenadas de un vector (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ son (2, 3) respecto a la base {(1, 0, 0), (0, 1, 1)} de V, indica que $\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1\\ 0\\ 0\end{pmatrix}+3\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 1\end{pmatrix}$, por tanto, la opción B es correcta.

La D es falsa por ser cierta alguna de las otras.

4. Sabiendo que es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$ el subconjunto $\wp$ formado por todas las n-uplas de números reales, tales que los elementos de cada una de ellas forman una progresión aritmética, se verifica que son base de $\wp$ los siguientes conjuntos: A) $B_1 = \{(1, 1, 1, ..., 1), (0, 1, 2, ..., n-1)\}$; B) $B_2 = \{$primer término, razón$\}$; C) La dimensión de $\wp$ es n; D) Ninguno de los anteriores.

❖ Los elementos de $\wp$ son de la forma $(a_1, a_1 + d, a_1 + 2d, ..., a_1 + (n-1)\,d)$, donde a_1 representa el primer elemento, n el número de elementos y d la razón de la progresión.

¿Se puede generar cualquier elemento de $\wp$ con B_1?.

La respuesta es sí, porque: $\begin{pmatrix} a_1 \\ a_1+d \\ a_1+2d \\ \vdots \\ a_1+(n-1)d \end{pmatrix} = a_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + d \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{pmatrix}$.

¿Son independientes los vectores de B_1?.

Si $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ \vdots \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ \vdots \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 2 \\ \vdots \\ n-1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} 0=\alpha \\ 0=\alpha+\beta \\ 0=\alpha+2\beta \\ \vdots \\ 0=\alpha+(n-1)\beta \end{cases} \Rightarrow \alpha=\beta=0$, es decir, son vectores linealmente independientes.

¿Es B_1 base de $\wp$?.

Sí porque es sistema de generadores linealmente independiente ⇒ La opción A es cierta.

¿Es B_2 base de $\wp$?.

Es evidente que es falsa la opción B porque los elementos de B_2 son elementos de $\mathbb{R}$, no n-uplas.

La dimensión de $\wp$ es dos, que es el número de elementos de una cualquiera de sus bases.

La opción C es falsa porque todas las bases de $\wp$ tienen el mismo número de elementos, es decir dos, y el número de elementos de $\wp$ es infinito. Esta opción sólo sería cierta en $\mathbb{R}^2$.

5. Sabiendo que U_1 es un subespacio de $\mathbb{R}^4$, se verifica: A) Hay un subespacio suplementario único, U_2, de U_1 en $\mathbb{R}^4$; B) Hay más de un subespacio suplementario de U_1 en $\mathbb{R}^4$; C) La intersección de U_1 y su suplementario U_2 es (0, 0, 0, 0); D) La suma de U_1 y su suplementario U_2 es suma directa.

Son correctas las opciones A, C y D.

❖ Recordemos la definición de suma directa de los subespacios U_1 y U_2, de V: Cada vector de la suma directa $U_1 \oplus U_2$ de dos subespacios U_1 y U_2 se puede descomponer de forma única como suma de un vector de U_1 y otro de U_2.
$U_1 \oplus U_2 = \{\overline{u} = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 / \overline{u}_1 \in U_1, \overline{u}_2 \in U_2\}$, tal que, la descomposición de cada vector $\overline{u}$ es única.

⇒ La opción A es cierta y la opción B es falsa.

De la definición anterior se puede deducir la siguiente:

$\overline{u} = \overline{u}_1 + \overline{u}_2 = \overline{0} \Rightarrow \overline{u}_1 = \overline{u}_2 = \overline{0}, \forall \overline{u} \in U_1 \oplus U_2,$

que se puede expresar diciendo que cualquier $\overline{u} \in U_1 \cap U_2$ es $\overline{u} = \overline{0}$.

⇒ La opción C es cierta.

❖ La suma de U_1 y U_2 es directa si verifica $U_1 + U_2 = V$ y $U_1 \cap U_2 = \overline{0}$, dicha condición la cumplen los espacios suplementarios.

⇒ La opción D es cierta.

6. Si $S = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / x_3 = -x_4\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^4$, se verifica: A) $B = \{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1)\}$ es una base de S; B) $B' = \{(0, 0, 0, 1)\}$ es una base de su suplementario; C) Una base de S y una base de su suplementario forman una base de $\mathbb{R}^4$; D) La dimensión de S y la dimensión de su suplementario suman cuatro.

❖ Los elementos de S son de la forma $(x_1, x_2, x_3, -x_3)$.

¿Los vectores de B generan S?.

Sí, porque $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ -x_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$.

¿Son linealmente independientes?.

Sí, porque si $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = 0.$

$\Rightarrow$ La opción A es correcta.

La opción C es cierta siempre.

$\{(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, -1), (0, 0, 0, 1)\}$ es base de $\mathbb{R}^4$ porque está formada por cuatro vectores linealmente independientes $\Rightarrow$ B' sí es una base del suplementario $\Rightarrow$ Es correcta la opción B.

¿Se verifica Dim $(U_1 + U_2)$ + *Dim* $(U_1 \cap U_2)$ = *Dim* U_1 + *Dim* U_2*?.*

Dimensión de $S = 3$.

Dimensión del suplementario = 1.

Dimensión de $\mathbb{R}^4 = 4$.

Dimensión de $(U_1 \cap U_2)$ = Dimensión de $\{(0, 0, 0, 0)\} = 0$

$\Rightarrow$ Es cierta la opción D.

7. Sabiendo que $U = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 = x_3\}$ y $W = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 = 0, x_2 = 0\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^3$, es cierto que: A) No se puede formar una base de $\mathbb{R}^3$ con vectores de una base de U y una base de W; B) Dos vectores cualesquiera de U y uno cualquiera de W forman una base de $\mathbb{R}^3$; C) La suma de U y W es suma directa; D) $U \cup W$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$.

Es muy fácil ver que $B = \{(1, 0, 1), (0, 1, 0)\}$ es base de U; $B' = \{(0, 0, 1)\}$ es base de W y $\{(1, 0, 1), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es base de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ A es falsa.

La opción B no es correcta, porque si se eligen en U dos vectores linealmente dependientes, sólo uno de ellos podría estar en la base de $\mathbb{R}^3$, y como W sólo puede aportar un vector linealmente independiente, no se puede formar una base de $\mathbb{R}^3$.

Ejemplo:

Elijamos los vectores de U: $(1, 1, 1) = 1(1, 0, 1) + 1(0, 1, 0)$ y $(3, 3, 3) = 3(1, 0, 1) + 3(0, 1, 0)$

Ambos son dependientes: $(3, 3, 3) = 3(1, 1, 1)$, sólo uno de los dos puede formar parte de una base de $\mathbb{R}^3$, tomemos el $(1, 1, 1)$.

Elijamos cualquier vector de W, por ejemplo $(0, 0, 1)$.

Para la base de $\mathbb{R}^3$ sólo contaríamos con los vectores $(1, 1, 1)$ y $(0, 0, 1)$ de los tres que son necesarios.

¿Es directa la suma $U + W$?.

$U \cap W = \{(0, 0, 0)\} \Rightarrow$ C es cierta.

¿Es $U \cup W$ subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?.

$U \cup W$ está formado por los vectores que pertenecen a U ó W, o a ambos, y no verifica que, la suma de dos vectores de $U \cup W$ pertenece a $U \cup W$.

Ejemplo:

$(2, 1, 2) \in U$; $(0, 0, 5) \in W$; $(2, 1, 2) + (0, 0, 5) = (2, 1, 7) \notin U \cup W$, ya que no verifica $x_1 = x_3$ ni $x_1 = x_2 = 0$.

$\Rightarrow$ D es falsa.

8. Si L_1 es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $\{(1, 0, 0), (0, 0, 1)\}$, y L_2 el generado por $\{(1, 1, 1)\}$, se verifica: A) $L_1 \cap L_2$ no es un espacio vectorial; B) Las ecuaciones paramétricas de $L_1 \cap L_2$ son $(x_1, x_2, x_3) = \alpha(1, 1, 1)$;

C) Hay varias posibilidades de descomponer el vector (2, 5, 9) como suma de un vector de L_1 y uno de L_2; D) $L_1 + L_2$ es suma directa.

¿Es $L_1 \cap L_2$ espacio vectorial?.

$L_1 \cap L_2$ sí es espacio vectorial (ver ejercicio 11 de capítulo 1-2) $\Rightarrow$ La opción A es falsa.

¿Cómo son los vectores de L_1?.

Los vectores de L_1 son de la forma: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \mu \end{cases}$.

¿Cómo son los vectores de L_2?.

Los vectores de L_2 son de la forma: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \alpha \end{cases}$.

¿Cómo son los vectores de $L_1 \cap L_2$?.

Los vectores de $L_1 \cap L_2$ pertenecen a L_1 y a L_2, por tanto, deben verificar ambos sistemas de ecuaciones $\Rightarrow x_1 = x_2 = x_3 = \alpha = 0$.

$L_1 \cap L_2$ está formado sólo por el vector (0, 0, 0) $\Rightarrow$ La opción B es falsa.

La opción A es cierta porque $\{(0, 0, 0)\}$ es siempre un subespacio de $\mathbb{R}^3$ con las operaciones estándar.

¿Es $L_1 + L_2$ suma directa?.

Cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede descomponer como suma de un vector de L_1 y uno de L_2 por existir una base de $\mathbb{R}^3$ formada por una base de L_1 y una base de L_2.

Además, por ser $L_1 \cap L_2 = \{(0, 0, 0)\}$ la suma de L_1 y L_2 es suma directa.

$L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2 \Rightarrow$ La opción D es cierta.

Por ser $L_1 + L_2 = L_1 \oplus L_2$ suma directa cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede descomponer como suma de un vector de L_1 y uno de L_2 de forma única $\Rightarrow$ La opción C es falsa.

La descomposición posible del vector (2, 5, 9) es la que proporciona la solución del sistema de ecuaciones que se obtiene al igualar coordenada a coordenada en la expresión siguiente: $\begin{pmatrix}2\\5\\9\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda\\0\\\mu\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\alpha\\\alpha\\\alpha\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases}2 = \lambda + \alpha\\5 = \alpha\\9 = \mu + \alpha\end{cases} \Rightarrow \lambda = -3; \mu = 4; \alpha = 5,$

que es la solución única del sistema.

9. Si L_1 es el subespacio de $\mathbb{R}^4$ generado por {(1, 0, 1, 1), (1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1)}, y L_2 el generado por {(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)}, se verifica: A) Dim L_1 = Dim L_2 = 3; B) $L_1 \cap L_2 = \{(0, 0, 0, 0)\}$; C) $L_1 + L_2 = \mathbb{R}^4$; D) $L_1 + L_2$ es suma directa.

¿Dimensión de L_1?.

La dimensión de L_1 es 2, porque

$$\begin{cases}(1,0,1,1) = (1,0,0,0) + (0,0,1,1) \text{ y}\\ \{(1,0,0,0),(0,0,1,1)\} \text{ es libre.}\end{cases}$$

¿Dimensión de L_2?.

La dimensión de L_2 es 3, porque {(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 0, 1, 0)} es base de L_2.

$\Rightarrow$ La opción A es falsa.

¿Ecuaciones de L_1?.

Los vectores de L_1 son de la forma $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \beta \\ x_4 = \beta \end{cases} \Rightarrow$ La primera coordenada puede tomar cualquier valor, la segunda debe ser 0, y, la tercera y la cuarta iguales $\Rightarrow$ Sus ecuaciones cartesianas son $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = x_4 \end{cases}$.

¿Ecuaciones de L_2?.

Los vectores de L_2 son de la forma $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \gamma \\ x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow$

Cada una de las tres primeras coordenadas puede tomar cualquier valor real y la cuarta tiene que valer 0 $\Rightarrow$ Sus ecuaciones cartesianas son $x_4 = 0$.

¿Ecuaciones de $L_1 \cap L_2$?.

Los vectores de la intersección deben verificar las ecuaciones de los dos subespacios, es decir, son las soluciones del sistema $\begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = x_4 \\ x_4 = 0 \end{cases}$.

Es solución del sistema cualquier cuaterna que tenga las tres últimas coordenadas 0, y cualquier valor en la primera $\Leftrightarrow$ Las soluciones son de la forma $(x_1, 0, 0, 0) \Rightarrow$ La opción B es falsa.

Una base de $L_1 \cap L_2$ es $\{(1, 0, 0, 0)\} \Rightarrow$ Su dimensión es 1.

También es falsa la opción D, porque $L_1 \cap L_2 \neq \{(0, 0, 0, 0)\}$.

¿$L_1 + L_2 = \mathbb{R}^4$?.

Al aplicar la fórmula de Grassman:

Dim L_1 + Dim L_2 = Dim $(L_1 + L_2)$ + Dim $(L_1 \cap L_2) \Rightarrow 2 + 3 =$ Dim $(L_1 + L_2) + 1$ $\Rightarrow$ Dim $(L_1 + L_2) = 4$.

El único subespacio de $\mathbb{R}^4$ con dimensión 4 es $\mathbb{R}^4 \Rightarrow$ Es cierta la opción C.

10. Si L_1 y L_2 son los subespacios de $\mathbb{R}^4$ del ejercicio anterior, se verifica que suplementario de L_1 es: A) L_2; B) No existe; C) Es el generado por $\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$; D) La base del suplementario es única.

¿Es $L_1 \cap L_2 = (0, 0, 0, 0)$?.

$L_1 \cap L_2 = (x_1, 0, 0, 0) \neq (0, 0, 0, 0) \Rightarrow L_2$ no es suplementario de $L_1 \Rightarrow$ La opción A es falsa.

¿Base de L_1?.

Una base de L_1 está formada por dos vectores suyos linealmente independientes, por ejemplo: $\{(1, 0, 0, 0), (0, 0, 1, 1)\}$.

¿Base del suplementario de L_1?.

Cualquier base del suplementario de L_1 añadida a una base de L_1 debe ser base de $\mathbb{R}^4$.

Una base de $\mathbb{R}^4$ está formada por cuatro vectores linealmente independientes $\Rightarrow$ Hay que buscar dos vectores de $\mathbb{R}^4$, independientes entre sí e independientes de los de la base elegida en L_1.

$\{(0, 1, 0, 0), (0, 0, 0, 1)\}$ verifica las condiciones pedidas $\Rightarrow$ C es cierta.

Es evidente que la opción B es falsa.

En una base se puede sustituir un vector por otro que cumpla determinadas condiciones sin que varíe el espacio generado $\Rightarrow$ La opción D es falsa.

11. Si $A = \langle (1, 2, 1, 1), (-1, 0, 1, 0), (2, 2, 0, 1) \rangle$ y $B = \{(x_1, x_2, x_3, x_4) / 2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0\}$ son subespacios de $\mathbb{R}^4$ verifican: A) La dimensión de A es 3; B) La dimensión de B es 3; C) La suma de A y B es directa; D) Ninguna de las anteriores.

El sistema $\{(1, 2, 1, 1), (-1, 0, 1, 0), (2, 2, 0, 1)\}$ no es libre, ya que: $(1, 2, 1, 1) - (-1, 0, 1, 0) = (2, 2, 0, 1)$.

Al quitar el vector dependiente queda el sistema $\{(1, 2, 1, 1), (-1, 0, 1, 0)\}$, que es libre y forma una base del subespacio A, cuya dimensión es dos $\Rightarrow$ La opción A es falsa.

El subespacio B de $\mathbb{R}^4$ cuyas ecuaciones cartesianas son: $2x_1 - 2x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$ tiene por ecuaciones paramétricas:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = \delta \\ x_4 = 2\alpha - 2\beta + 2\delta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix} + \delta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix},$$ los vectores $(1, 0, 0, 2)$, $(0, 1, 0, -2)$, $(0, 0, 1, 2)$ forman un sistema libre, por tanto una base de B, y la dimensión de este subespacio es tres $\Rightarrow$ La opción B es correcta.

$A + B$ no puede ser directa porque A y B son subespacios de $\mathbb{R}^4$, y, si la suma fuera directa, la dimensión de $A \cap B$ sería 0, y como $A + B$ también es un subespacio de $\mathbb{R}^4$, el mayor valor que puede tener su dimensión es cuatro, y no podría cumplirse la igualdad: $\text{Dim}\,(A + B) + \text{Dim}\,(A \cap B) = \text{Dim}\,A + \text{Dim}\,B$.

$\Rightarrow$ La opción C es falsa.

También es falsa la D por ser cierta la B.

CAPÍTULO 2

APLICACIONES LINEALES

Ejercicios relativos a:

Definición de aplicación lineal entre dos espacios vectoriales

1. Si f: $\mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación tal que, $f(x) = (x, 1, -x)$, es cierto que: A) f conserva la suma; B) f transforma el neutro de $(\mathbb{R}, +)$ en el neutro de $(\mathbb{R}^3, +)$; C) f conserva el producto por un escalar; D) f es una aplicación lineal.

¿Conserva f la suma?.

$$x \xrightarrow{f} f(x) = (x, 1, -x)$$
$$y \xrightarrow{f} f(y) = (y, 1, -y)$$
$$x + y \xrightarrow{f} f(x + y) = (x + y, 1, -x - y)$$

$f(x + y)$ no es igual a $f(x) + f(y)$ porque tienen la segunda coordenada distinta $\Rightarrow$ La opción A es falsa.

¿Es $f(\lambda x)$ igual a $\lambda f(x)$?.

$$x \xrightarrow{f} f(x) = (x, 1, -x)$$
$$\lambda x \xrightarrow{f} f(\lambda x) = (\lambda x, 1, -\lambda x)$$

porque tienen la segunda coordenada distinta.

$\lambda\,(x,\ 1,\ -x) = (\lambda x,\ \lambda,\ -\lambda x) \neq (\lambda x,\ 1,\ -\lambda x) \Rightarrow$ La opción C es falsa.

¿Es $f\,(0) = \overline{0}$*?.*

No, $f\,(0) = (0,\ 1,\ 0) \neq (0,\ 0,\ 0) \Rightarrow$ La opción B es falsa.

¿Es f una aplicación lineal?.

No, para justificarlo es suficiente comprobar que no cumple cualquiera de las tres condiciones anteriores.

2. Si $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación tal que, $f\,(x) = (x,\ 0,\ -x)$, es cierto que: A) f conserva la suma; B) f transforma el neutro de $(\mathbb{R}, +)$ en el neutro de $(\mathbb{R}^3, +)$; C) f conserva el producto por un escalar; D) f es una aplicación lineal.

¿Conserva f la suma?.

$$x \xrightarrow{f} f(x) = (x, 0, -x)$$
$$y \xrightarrow{f} f(y) = (y, 0, -y)$$
$$x + y \xrightarrow{f} f(x + y) = (x + y, 0, -x - y)$$

$f(x+y) = f(x) + f(y)$ porque $(x_1, 0, -x_1) + (x_2, 0, -x_2) = (x_1 + x_2, 0, -x_1 - x_2)$.

$\Rightarrow$ La opción A es cierta.

¿Conserva f el producto por escalares?.

$$x \xrightarrow{f} f(x) = (x, 0, -x)$$
$$\lambda x \xrightarrow{f} f(\lambda x) = (\lambda x, 0, -\lambda x)$$
$f(\lambda x) = \lambda f(x) \Rightarrow$ La opción B es cierta.

¿Es $f(0) = \overline{0}$*?*.

Sí, $f(0) = (0, 0, 0) \Rightarrow$ La opción C es cierta.

¿Es f una aplicación lineal?.

Sí, por conservar la suma y el producto por escalares.

3. $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2 / f(x_1, x_2) = (x_1 + 2, x_2)$ verifica: A) Es una aplicación lineal; B) No es aplicación lineal; C) En cualquier aplicación lineal de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ la imagen de (0, 0) puede no ser (0, 0); D) Ninguna de ellas.

❖ Para ver que es cierta la opción A debemos comprobar que cumple las condiciones dadas en la definición de aplicación lineal.

❖ Para ver que la opción A no es cierta es suficiente comprobar que no tiene alguna de las propiedades que tienen todas las aplicaciones lineales.

Una de esas propiedades es: "Para cualquier aplicación lineal $f: V \to W$, se verifica que $f(\overline{0}) = \overline{0}$".

Una forma de demostrar dicha propiedad para aplicaciones $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es:

$(0, 0) = 0\,(1, 0) + 0\,(0, 1)$, y si $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal, se verifica: $f(0, 0) = 0\,f(1, 0) + 0\,f(0, 1) = (0, 0)$ para cualquier valor de $f(1, 0)$ y $f(0, 1)$ $\Rightarrow$ Es falsa la opción C.

Comprobemos que la aplicación dada no tiene esta propiedad:

$f(0, 0) = (2, 0) \Rightarrow$ Es cierta la opción B, y son falsas A y D.

4. Cuando se define la aplicación $f(a + bx + cx^2) = (a + bx + cx^2) + (c + bx + ax^2)$ del espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que dos en sí mismo, es cierto que: A) f conserva la suma; B) f conserva el producto de polinomios; C) f conserva el producto por un escalar; D) f es una aplicación lineal.

¿Conserva f la suma?.

$$P_1 = a_1 + b_1x + c_1x^2 \xrightarrow{f} f(P_1) = (a_1 + b_1x + c_1x^2) + (c_1 + b_1x + a_1x^2) =$$
$$= (a_1 + c_1) + 2b_1x + (c_1 + a_1)x^2.$$
$$P_2 = a_2 + b_2x + c_2x^2 \xrightarrow{f} f(P_2) = (a_2 + b_2x + c_2x^2) + (c_2 + b_2x + a_2x^2) =$$
$$= (a_2 + c_2) + 2b_2x + (c_2 + a_2)x^2.$$

$$P_1 + P_2 = (a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2 \xrightarrow{f} f(P_1 + P_2) =$$
$$= (a_1 + a_2 + c_1 + c_2) + 2(b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2 + a_1 + a_2)x^2.$$

$f(P_1 + P_2) = f(P_1) + f(P_2) \Rightarrow$ La opción A es cierta.

¿f conserva el producto de polinomios?.

El producto de dos polinomios de grado menor o igual que dos, puede no ser un polinomio de grado menor o igual que dos, y no estar definida su imagen mediante la aplicación dada.

Ejemplo: $x^2x^2 = x^4$.

$\Rightarrow$ La opción B es falsa.

¿Conserva f el producto por escalares?.

$$P = a + bx + cx^2 \xrightarrow{f} f(P) = (a + bx + cx^2) + (c + bx + ax^2) =$$
$$= (a + c) + 2bx + (c + a)x^2.$$
$$\lambda P \xrightarrow{f} f(\lambda P) = f(\lambda a + \lambda bx + \lambda cx^2) =$$
$$= (\lambda a + \lambda c) + 2\lambda bx + (\lambda a + \lambda c)x^2.$$

$f(\lambda P) = \lambda f(P) \Rightarrow$ La opción C es cierta.

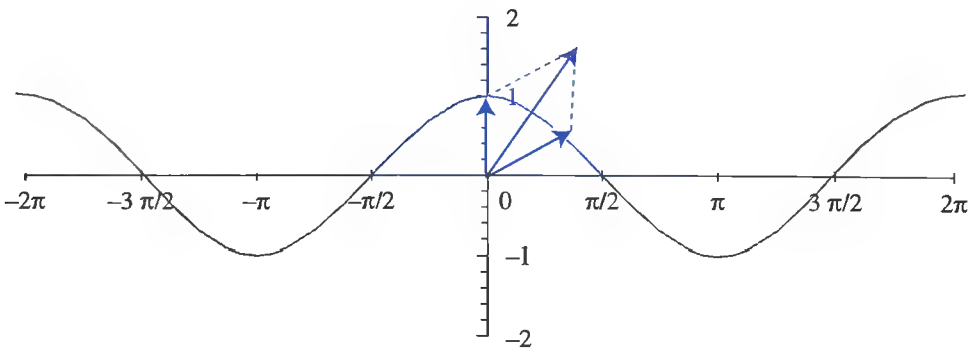
¿Es f una aplicación lineal?.

Sí, ya que son ciertas las opciones A y C $\Rightarrow$ La opción D es cierta.

❖ Para ver que f es aplicación lineal es suficiente comprobar por el mismo procedimiento que se verifica $f(P_1 + \alpha P_2) = f(P_1) + \alpha f(P_2)$.

5. Dada la aplicación $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, tal que, $f(x) = \cos x$, es cierta la afirmación: A) A la suma de originales corresponde la suma de imágenes (conserva la suma); B) Al producto de un escalar por un vector corresponde el escalar por al imagen del vector (conserva el producto por escalares); C) Es una aplicación lineal; D) Ninguna de las anteriores.

La gráfica de la función $f(x) = \cos x$ pone de manifiesto de forma inmediata que no es una aplicación lineal, ya que la suma de dos vectores, que están en la gráfica, no está en dicha gráfica:



Vamos a comprobarlo analíticamente:

¿Conserva la suma?.

$$x_1 \xrightarrow{f} f(x_1) = \cos x_1$$
$$x_2 \xrightarrow{f} f(x_2) = \cos x_2$$
$$x_1 + x_2 \xrightarrow{f} f(x_1 + x_2) = \cos(x_1 + x_2)$$

$$\begin{cases} f(x_1 + x_2) = \cos(x_1 + x_2) = \cos x_1 \cos x_2 - \operatorname{sen} x_1 \operatorname{sen} x_2 \\ f(x_1) + f(x_2) = \cos x_1 + \cos x_2 \end{cases}$$

No conserva la suma $\Rightarrow$ La opción A es falsa.

¿Conserva el producto por escalares?.

$$x \xrightarrow{f} f(x) = \cos x$$
$$\lambda x \xrightarrow{f} f(\lambda x) = \cos(\lambda x)$$

$\begin{cases} \lambda f(x) = \lambda \cos x \\ f(\lambda x) = \cos(\lambda x) \end{cases}$; si x es tal que cos x vale 1, y $\lambda > 1 \Rightarrow \lambda \cos x > 1$, mientras que cos $(\lambda x) \leq 1 \Rightarrow$ No conserva el producto por escalares, la opción B es falsa.

Es obvio que la aplicación $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R} / f(x) = \cos x$ no es una aplicación lineal $\Rightarrow$ La opción C es falsa.

$\Rightarrow$ La opción D es cierta porque no lo es ninguna de las anteriores.

6. Si $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal, tal que, $f(1, 0) = (1, 2, 0)$ y $f(0, 1) = (0, 3, 1)$, se verifica: A) $f(5, 7) = (5, 31, 7)$; B) $f(1, 1) = (1, 0, 1)$; C) Las imágenes de todos los vectores de $\mathbb{R}^2$ están en el plano de ecuación $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$; D) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

Por ser $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ una aplicación lineal:

$$\Rightarrow f\begin{pmatrix} 5 \\ 7 \end{pmatrix} = 5f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 7f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 5\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 5 \\ 31 \\ 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Es cierta la opción A.}$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 5 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Es falsa la opción B.}$$

Cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ es de la forma (a, b).

$$\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

La imagen de (a, b) mediante la aplicación lineal f es un vector (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$

que verifica $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} = af\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + bf\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{cases} x_1 = a \\ x_2 = 2a + 3b \\ x_3 = b \end{cases} \Rightarrow$ La imagen de cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ verifica $2x_1 - x_2 + 3x_3 = 0$, ya que $2a - (2a + 3b) + 3b = 0 \Rightarrow$ Es correcta la opción C.

7. Si $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal, tal que, $f(1, 1) = (1, 4)$ y $f(2, -1) = (-2, 3)$, la imagen de $(3, -1)$ es: A) $\left(\frac{1}{3}, \frac{4}{3}\right)$; B) $\left(\frac{-7}{3}, \frac{16}{3}\right)$; C) $\left(\frac{-8}{3}, \frac{12}{3}\right)$; D) Ninguna de las anteriores.

¿$B = \{(1, 1), (2, -1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$?.

Sí, es fácil comprobar que sus vectores son linealmente independientes.

¿Se puede escribir $(3, -1)$ como combinación lineal de los vectores de B?.

Sí, cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede escribir en función de los vectores de una de sus bases.

$\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}=\alpha\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\beta\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}3=\alpha+2\beta\\-1=\alpha-\beta\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=\dfrac{1}{3}\\\beta=\dfrac{4}{3}\end{cases}\Rightarrow\left(\dfrac{1}{3},\dfrac{4}{3}\right)$ son las coordenadas en base B del vector que en la base canónica es $(3, -1)$.

Por ser f aplicación lineal, se verifica: $f\left(\begin{pmatrix}3\\-1\end{pmatrix}\right)=f\left(\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{4}{3}\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}\right)=$

$=\frac{1}{3}f\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}+\frac{4}{3}f\begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}=\frac{1}{3}\begin{pmatrix}1\\4\end{pmatrix}+\frac{4}{3}\begin{pmatrix}-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1/3\\4/3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}-8/3\\12/3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-7/3\\16/3\end{pmatrix}\Rightarrow$ Sólo es correcta la opción B.

8. Si $f:\mathbb{R}^2\rightarrow\mathbb{R}^3$ es una aplicación lineal en la que se conocen las imágenes de los elementos de una base de $\mathbb{R}^2$, se verifica: A) Es posible obtener la imagen de cualquier vector de $\mathbb{R}^2$; B) Cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ tiene un original en $\mathbb{R}^2$; C) La imagen de $\mathbb{R}^2$ es $\mathbb{R}^3$; D) Ninguna de las anteriores.

$B=\{(1, 0), (0, 1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2\Rightarrow$ Cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ se puede escribir como combinación lineal de sus vectores: $\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}=x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$.

Por ser f aplicación lineal $f\left(\begin{pmatrix}x_1\\x_2\end{pmatrix}\right)=f\left(x_1\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+x_2\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right)=x_1f\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}+x_2f\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\Rightarrow$ La opción A es correcta y la opción D es falsa.

❖ La conclusión obtenida es válida para cualquier base de $\mathbb{R}^2$. La demostración a realizar es similar a la anterior.
Para ver que las opciones B y C son falsas es suficiente el siguiente ejemplo:

Supongamos la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$, tal que, $f(x_1, x_2) = (0, 0, 0)$, el único elemento de $\mathbb{R}^3$ que tiene un original es $(0, 0, 0)$.

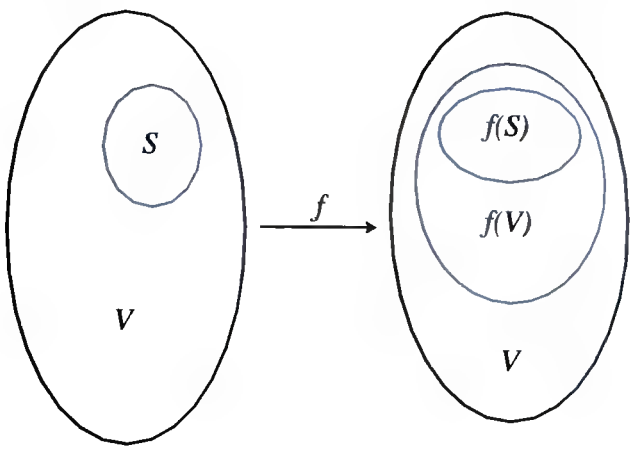
9. Si f es una aplicación lineal de un espacio vectorial V en V, se verifica: A) Es falso que $f(\overline{0}) = \overline{0}$ y $f(-\overline{x}) = -f(\overline{x})$, siendo $\overline{x}$ cualquier vector de V; B) Es falso que si $f(\overline{x}) = f(\overline{y}) \Rightarrow f(\overline{x} - \overline{y}) = \overline{0}$; C) Si S es subespacio de V, entonces $f(S)$ es un subespacio de $f(V)$; D) Ninguna de las anteriores.

Si f es lineal es cierto (falso que es falso) que $\begin{cases} f(\overline{0}) = f(0\overline{x}) = 0f(\overline{x}) = \overline{0} \\ f(-\overline{x}) = f(-1\overline{x}) = -f(\overline{x}) \end{cases}$

$\Rightarrow$ La opción A es falsa.

Si f es lineal es cierto (falso que es falso) que $f(\overline{x} - \overline{y}) = f(\overline{x}) - f(\overline{y}) = \overline{0}$ si $f(\overline{x}) = f(\overline{y}) \Rightarrow$ La opción B es falsa.

Si f es lineal es cierto que la imagen de un subespacio es un subespacio, además, como S está contenido en V, las imágenes de los elementos de S son imágenes de los elementos de V, y por tanto, están en $f(V) \Rightarrow$ La opción C es cierta.



10. Si $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es la aplicación lineal $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2)$, se verifica: A) Si $\overline{x}, \overline{y}$ son linealmente independientes, entonces, $f(\overline{x}), f(\overline{y})$ son linealmente independientes; B) Si $f(\overline{x}), f(\overline{y})$ son linealmente dependientes, entonces, $\overline{x}, \overline{y}$ son linealmente dependientes; C) Si $f(\overline{x}), f(\overline{y})$ son linealmente independientes, entonces, $\overline{x}, \overline{y}$ son linealmente independientes; D) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{aligned} \mathbb{R}^3 &\longrightarrow \mathbb{R}^2 \\ (x_1, x_2, x_3) &\xrightarrow{f} (x_1, x_2) \\ \overline{x} = (0,1,0) &\xrightarrow{f} f(\overline{x}) = (0,1) \\ \overline{y} = (0,1,1) &\xrightarrow{f} f(\overline{y}) = (0,1) \end{aligned}$$

$\Rightarrow$ La opción A es falsa, porque $\begin{cases} (0,1,0),(0,1,1) \text{ son linealmente independientes} \\ (0,1),(0,1) \text{ son linealmente dependientes} \end{cases}$

$\Rightarrow$ La opción B también es falsa, para verlo basta tomar los vectores del ejemplo anterior.

Queremos ver si $\overline{x}, \overline{y}$ son linealmente independientes cuando lo son $f(\overline{x}), f(\overline{y})$, para ello hay que demostrar que "$\lambda\overline{x} + \mu\overline{y} = \overline{0} \Rightarrow \lambda = \mu = 0$".

En efecto:

$$\lambda\overline{x} + \mu\overline{y} = \overline{0} \Leftrightarrow \lambda \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda x_1 + \mu y_1 = 0 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 = 0 \\ \lambda x_3 + \mu y_3 = 0 \end{cases}$$

$\begin{cases} \lambda x_1 + \mu y_1 = 0 \\ \lambda x_2 + \mu y_2 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \lambda f(\overline{x}) + \mu f(\overline{y}) = \overline{0}$, pero por ser $f(\overline{x}), f(\overline{y})$ linealmente independientes debe ser $\lambda = \mu = 0 \Rightarrow \overline{x}, \overline{y}$ son linealmente independientes $\Rightarrow$ La opción C es cierta.

Ejercicios relativos a:

"La matriz asociada a una aplicación lineal."

1. Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal, tal que, $f(1, 0, 0) = (1, 1)$; $f(0, 1, 0) = (1, 1)$; $f(0, 0, 1) = (1, 0)$, se verifica: A) La matriz asociada a f tiene dos filas y tres columnas; B) La matriz asociada a f tiene tres filas y dos columnas; C) La imagen de cualquier vector de $\mathbb{R}^3$ se puede expresar en función de los vectores de cualquier base de $\mathbb{R}^2$; D) Ninguna de las anteriores.

¿Matriz asociada a f?.

❖ Matriz asociada a f es la matriz cuyas columnas son las imágenes (en $\mathbb{R}^2$) de la base elegida en $\mathbb{R}^3$.

Cualquier base de $\mathbb{R}^3$ tiene tres vectores y su imagen es un vector de $\mathbb{R}^2$ (tiene dos coordenadas), por tanto, la matriz asociada tiene tres columnas y dos filas.

$\Rightarrow$ Es correcta la opción A, e incorrecta la opción B.

La matriz asociada a f es $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

¿Expresión matricial de la aplicación?.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

¿Ecuaciones cartesianas de la aplicación?.

❖ La aplicación dada transforma (x_1, x_2, x_3) en (y_1, y_2), las fórmulas que permiten obtener la imagen (y_1, y_2) de cualquier original (x_1, x_2, x_3) son las ecuaciones de la aplicación.

Las ecuaciones cartesianas de f obtenidas de su expresión matricial son

$$\begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 + x_2 \end{cases}.$$

Los vectores de la imagen de f están en $\mathbb{R}^2$, como consecuencia se pueden expresar en función de cualquiera de sus bases, una forma de hacerlo es

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_3 \\ 0 \end{pmatrix} = (x_1 + x_2)\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Es correcta la opción C.}$$

La opción D es incorrecta.

2. Si $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal, tal que, $f(1, 0, 0) = (1, 1)$; $f(0, 1, 0) = (1, 1)$; $f(0, 0, 1) = (1\ 0)$, la imagen del subespacio definido por $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ verifica: A) Es el subespacio $x_1 = 0$ de $\mathbb{R}^2$; B) Tiene dimensión 2; C) Está generado por (1, 1); D) Ninguna de las anteriores. (Tomando las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$).

¿Matriz asociada a f?.

$A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, como en el ejercicio anterior.

¿Imagen del subespacio $x_1 + x_2 + x_3 = 0$?.

Unas ecuaciones paramétricas del subespacio $x_1 + x_2 + x_3 = 0$ son:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \mu \\ x_3 = -\lambda - \mu \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \mu\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$f\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}; f\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow f(x_1 + x_2 + x_3 = 0)$ está generado por (0, 1).

Unas ecuaciones paramétricas de $f(x_1 + x_2 + x_3 = 0)$ son: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

La coordenada x_2 puede tener cualquier valor, mientras que x_1 debe ser $0 \Rightarrow$ Las ecuaciones cartesianas son: $x_1 = 0 \Rightarrow$ Es correcta la opción A.

❖ Para calcular la imagen de un subespacio es suficiente conocer la imagen de un sistema generador.

❖ $\{(1, 0, -1), (0, 1, -1)\}$ es una base de $x_1 + x_2 + x_3 = 0$, por tanto $\{f(1, 0, -1), f(0, 1, -1)\}$ es un sistema de generadores de $f(x_1 + x_2 + x_3 = 0)$.

❖ Las aplicaciones lineales pueden no conservar la independencia lineal ni la dimensión de los subespacios.

¿Dimensión de la imagen del subespacio $x_1 + x_2 + x_3 = 0$*?.*

$\{(0, 1)\}$ es base de $x_1 = 0$, como está formada por un solo vector $\Rightarrow$ Dimensión $(x_1 = 0) = 1 \Rightarrow$ Es incorrecta la opción B.

¿Es $(1, 1)$ *generador de* $x_1 = 0$*?.*

$(1, 1)$ genera $\{(x_1, x_2)\} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = \lambda \end{cases} \Leftrightarrow x_1 = x_2$, pero no puede generar el subespacio $x_1 = 0$, porque de entre sus infinitos vectores sólo se podría obtener el $(0, 0) \Rightarrow$ Es incorrecta la opción C.

3. Si $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal, tal que. $f(1, 0, 0) = (1, 1)$; $f(0, 1, 0) = (1, 1)$; $f(0, 0, 1) = (1, 0)$, se verifica: A) La imagen de la aplicación es $\mathbb{R}^2$; B) La dimensión de imagen de f es 1; C) Hay vectores de $\mathbb{R}^2$ que no tienen un original en $\mathbb{R}^3$; D) Ninguna de las anteriores. (Con las bases canónicas).

¿Matriz asociada a f?.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}$$

¿Expresión matricial de la aplicación?.

$$\begin{pmatrix}y_1\\ y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & 1\\ 1 & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}$$

¿Ecuaciones de la aplicación?.

$$\begin{cases}y_1=x_1+x_2+x_3\\ y_2=x_1+x_2\end{cases}$$

¿Imagen de f?.

Está formada por todos los vectores (y_1, y_2) de $\mathbb{R}^2$. Para cualquier (y_1, y_2) hay un elemento (x_1, x_2, x_3) de $\mathbb{R}^3$ que satisface el sistema anterior $\Rightarrow$ Cualquier vector de $\mathbb{R}^2$ tiene un original en $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ La imagen de la aplicación es $\mathbb{R}^2$.

¿Dimensión de imagen de f?.

Dimensión de imagen de f = Dimensión de $\mathbb{R}^2 = 2$.

Sólo es correcta la opción A.

4. Si $f : \mathbb{R}^3 \to M_{2\times 2}$ es una aplicación lineal, tal que, $f(1,0,0)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$; $f(0,1,0)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -5 & 5\end{pmatrix}$ y $f(0,0,1)=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$, es cierto que: A) La matriz asociada a f tiene tres filas y tres columnas; B) La matriz asociada a f tiene tres filas y cuatro columnas; C) La matriz asociada a f tiene dos filas y dos columnas; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Se asocia a f la matriz cuyas columnas son las imágenes (en $M_{2\times2}$) de la base de $\mathbb{R}^3$ elegida. (Como no se especifica otra cosa, utilizaremos la base canónica de $M_{2\times2}$).

¿Coordenadas de $\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}$ *respecto a* $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$*?.*

$$f(1,0,0)=\begin{pmatrix}3 & 1\\ 2 & 4\end{pmatrix}=3\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Son (3, 1, 2, 4).

¿Coordenadas de $\begin{pmatrix}1 & -1\\ -5 & 5\end{pmatrix}$ *respecto a* $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$*?.*

$$f(0,1,0)=\begin{pmatrix}1 & -1\\ -5 & 5\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}-5\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+5\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Son (1, –1, –5, 5)

¿Coordenadas de $\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}$ *respecto a* $\left\{\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\right\}$*?.*

$$f(0,0,1)=\begin{pmatrix}2 & -2\\ -1 & 4\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}+4\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}.$$

Son (2, –2, –1, 4).

¿Matriz asociada a f?.

$$\begin{pmatrix}3 & 1 & 2\\ 1 & -1 & -2\\ 2 & -5 & -1\\ 4 & 5 & 4\end{pmatrix}$$ ⇒ La matriz asociada tiene tres columnas y cuatro filas.

⇒ Es correcta la opción D.

5. Si f es una aplicación lineal del espacio vectorial de polinomios de grado máximo dos en sí mismo, tal que, $f(1) = 3 + 2x + x^2$; $f(x) = 2$ y $f(x^2) = 2x^2$, es cierto que: A) No tenemos datos suficientes para escribir la matriz de f; B) No se pueden escribir las ecuaciones de f; C) No hay datos suficientes para encontrar la imagen del polinomio $x + 3$; D) Las coordenadas de $x + 3$ respecto a la base canónica son (11, 6, 3).

❖ $\{1, x, x^2\}$ es la base canónica del espacio vectorial dado.

❖ Cuando escribimos las coordenadas de un vector respecto a una base hay que conservar el orden de las coordenadas respecto a los vectores de la base.

¿Se puede escribir la matriz de f?.

Sí, porque conocemos las imágenes de los vectores de una base del espacio vectorial dado.

$$\begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

¿Se pueden escribir las ecuaciones de f?.

Sí, la imagen de cualquier vector de coordenadas (x_1, x_2, x_3) es el vector de coordenadas (y_1, y_2, y_3) obtenido a partir de la expresión matricial de f:

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}; \quad \begin{cases} y_1 = 3x_1 + 2x_2 \\ y_2 = 2x_1 \\ y_3 = x_1 + 2x_3 \end{cases}.$$

¿Se puede encontrar la imagen del polinomio $x + 3$?.

Sí, sustituyendo en cualquiera de las expresiones anteriores (x_1, x_2, x_3) por (3, 1, 0):

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 11 \\ 6 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

❖ La imagen del polinomio $x + 3$ se puede encontrar también sin utilizar la matriz asociada:

$$(3,1,0) = 3.1 + 1x + 0x^2 \Rightarrow f(3,1,0) = f(3.1 + 1x + 0x^2) = 3f(1) + 1f(x) =$$
$$= 3(3 + 2x + x^2) + 2 = 11 + 6x + 3x^2.$$

Sólo es cierta la opción D.

6. Dado el espacio vectorial real de funciones $F = \{f(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x\}$, la matriz asociada al endomorfismo de F definido por el cálculo de la derivada primera, con la base {sen x, cos x} es: A) $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Un endomorfismo es una aplicación lineal de un espacio vectorial en sí mismo.

❖ Este endomorfismo es una aplicación lineal que transforma una función real de la forma $f(x) = a \operatorname{sen} x + b \cos x$ en su derivada $f'(x) = a \cos x - b \operatorname{sen} x$.

¿Coordenadas de los vectores de la base?.

Las coordenadas de los vectores de la base son: $\begin{cases} \cos x = 0\operatorname{sen} x + 1\cos x = (0,\ 1) \\ \operatorname{sen} x = 1\operatorname{sen} x + 0\cos x = (1,\ 0) \end{cases}$

¿Coordenadas de las imágenes de los vectores de la base?.

$$\begin{cases} 1\operatorname{sen} x + 0\cos x \xrightarrow{\text{derivada}} 0\operatorname{sen} x + 1\cos x = (0,1) \\ 0\operatorname{sen} x + 1\cos x \xrightarrow{\text{derivada}} -1\operatorname{sen} x + 0\cos x = (-1,0) \end{cases}$$

¿Matriz del endomorfismo?.

La matriz pedida es $\begin{pmatrix} 0 & -1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

Sólo es correcta la opción A.

7. Si $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 \,/\, f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_1)$ es una aplicación lineal referida a la base canónica B, es cierto que la matriz asociada es: A) Simétrica; B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

¿Matriz asociada a la aplicación en base B?.

$$f:(x_1, x_2, x_3) \longrightarrow (x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_1)$$
$$(1,0,0) \longrightarrow (1, 1, -1)$$
$$(0,1,0) \longrightarrow (0, -1, 1)$$
$$(0,0,1) \longrightarrow (0, 0, 0)$$

La matriz asociada a la aplicación es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Es cierta la opción B.

¿Expresión matricial de la aplicación?.

La expresión matricial de la aplicación dada es: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

Las opciones A, C y D son falsas.

8. Si en el espacio vectorial $\wp_3$ de polinomios de grado menor que cuatro se define la aplicación lineal, tal que, a cada polinomio le asigna su derivada, la matriz asociada es: A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & .0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$;

C) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 \end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores. (Con la base canónica $\{1, x, x^2, x^3\}$)

¿Coordenadas de las imágenes de los vectores de la base?.

$1 = (1,0,0,0) \longrightarrow 0 = (0,0,0,0)$

$x = (0,1,0,0) \longrightarrow 1 = (1,0,0,0)$

$x^2 = (0,0,1,0) \longrightarrow 2x = (0,2,0,0)$

$x^3 = (0,0,0,1) \longrightarrow 3x^2 = (0,0,3,0)$

¿Matriz asociada a la aplicación?.

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Sólo es correcta la opción D.

Ejercicios relativos a:

"Operaciones con matrices."

1. Si f_A: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal, tal que, $f_A(x_1, x_2) = (x_1, 2x_2)$, y f_B: $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal, tal que, $f_B(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, -x_1 + x_2)$, se verifica: A) La matriz asociada a $f_A + 2f_B$ es $\begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$; B) La matriz asociada a $2f_B$ es $\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; C) La matriz asociada a $f_A \circ f_B$ es $\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$; D) La matriz asociada a $f_B \circ f_A$ es $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$.

❖ Utilizaremos $\{(1, 0), (0, 1)\}$ como base en $\mathbb{R}^2$ porque no se especifica otra.

¿Imágenes de los vectores de la base mediante f_A?.

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^2$

$f_A(x_1, x_2) = (x_1, 2x_2)$

$(1, 0) \to (1, 2.0) = (1, 0)$

$(0, 1) \to (0, 2.1) = (0, 2)$

¿Imágenes de los vectores de la base mediante f_B?.

$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^2$

$f_B(x_1, x_2) = (x_1 - x_2, -x_1 + x_2)$

$(1, 0) \to (1 - 0, 0 - 1) = (1, -1)$

$(0, 1) \to (0 - 1, 1 - 0) = (-1, 1)$

¿Imágenes de los vectores de la base mediante $2f_B$*?.*

$$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{2f_B} \mathbb{R}^2$$
$$(1, 0) \to 2\,(1, -1) = (2, -2)$$
$$(0, 1) \to 2\,(-1, 1) = (-2, 2)$$

¿Matriz asociada a $2f_B$*?.*

$$2\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ La opción B es falsa.

¿Matriz asociada a $f_A + 2f_B$*?.*

Aplicación	Matriz asociada	Imagen de (x_1, x_2)
$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^2$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$f_A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{2f_B} \mathbb{R}^2$	$2B = \begin{pmatrix} 2 & -2 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$2f_B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = f_{2B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_A + 2f_B} \mathbb{R}^2$	$A + 2B = \begin{pmatrix} 3 & -2 \\ -2 & 4 \end{pmatrix}$	$(f_A + 2f_B)\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (f_A + f_{2B})\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$ $= f_{A+2B}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3x_1 - 2x_2 \\ -2x_1 + 4x_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ La opción A es correcta.

¿Matriz asociada a $f_B \circ f_A$?.

Aplicación	Matriz asociada	Imagen de (x_1, x_2) mediante transformaciones sucesivas
$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^2$ $(x_1, x_2) \to (x_1, 2x_2)$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$f_A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^2$ $(x_1, x_2) \to (x_1 - x_2, -x_1 + x_2)$	$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$f_B\left(f_A\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f_B\begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^2$ $(x_1, 2x_2) \to (x_1 - 2x_2, -x_1 + 2x_2)$	$BA = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}$	$(f_B \circ f_A)(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ La opción D es incorrecta.

¿Matriz asociada a $f_A \circ f_B$?.

Aplicación	Matriz asociada	Imagen de (x_1, x_2) al aplicar transformaciones sucesivas
$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^2$ $(x_1, x_2) \to (x_1 - x_2, -x_1 + x_2)$	$B = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$	$f_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^2$ $(x_1 + x_2) \to (x_1, 2x_2)$	$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$	$f_A\left(f_B \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right) = f_A \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -x_1 + x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$
$\mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_B} \mathbb{R}^2 \xrightarrow{f_A} \mathbb{R}^2$ $(x_1, x_2) \to (x_1 - x_2, -2x_1 + 2x_2)$	$A\,B = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix}$	$(f_A \circ f_B)(x_1, x_2) = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} =$ $= \begin{pmatrix} x_1 - x_2 \\ -2x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ La opción C es incorrecta.

2. Si A, B son elementos del conjunto de matrices reales, se verifica: A) $AB = BA$; B) $AB = 0 \Rightarrow A = 0$ o $B = 0$; C) $AB = BC$ (con $B \neq 0$) $\Rightarrow A = C$; D) No es cierta ninguna de las anteriores.

❖ Para ver que no es cierta la opción A utilizaremos el siguiente ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ y } B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \Rightarrow AB = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

BA no se puede realizar porque B tiene 3 columnas mientras que A tiene 2 filas $\Rightarrow$ La opción A es falsa.

El mismo ejemplo vale para comprobar que la opción B es falsa:

El producto $AB = 0$ pero $A \neq 0$ y $B \neq 0$.

Aunque hay razones de tipo teórico, es suficiente utilizar el ejemplo anterior con

$C = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, que verifica $AB = BC$ (con $B \neq 0$) siendo $A \neq C \Rightarrow$ Tampoco es cierta la opción C.

Es correcta la opción D.

❖ Hay matrices para las que se verifican las opciones A, B, C, sin que ello quiera decir que el conjunto tenga dichas propiedades.

Es un buen ejercicio buscar matrices para las que se cumple, y otras para las que no se cumple.

3. La composición de aplicaciones verifica: A) Es conmutativa; B) La composición de dos aplicaciones no nulas puede ser nula; C) Cualquier aplicación se puede componer con otra que la deje invariante; D) Ninguna de las anteriores.

Fijadas unas bases cada matriz está asociada a una aplicación lineal, el producto de matrices es la matriz asociada a la composición de aplicaciones, y, como dicho producto no es conmutativo, la composición de aplicaciones no es conmutativa.

⇒ La opción **A** es falsa.

❖ El hecho de que el número de filas de la primera matriz debe ser igual al número de columnas de la segunda para que se pueda realizar su producto, es equivalente a que el espacio final en la primera aplicación debe ser el inicial en la segunda para que se pueda hacer su composición.

❖ Es muy fácil comprobarlo con un ejemplo.

Ejemplo:

$A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$ es una matriz asociada a la aplicación lineal $f_A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$ fijadas unas bases y, $B=\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ a $f_B:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$.

$f_A:\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^2$	$f_B:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1\\ 0\end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\to\begin{pmatrix}0 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\ x_2+2x_3\end{pmatrix}$

No es posible hacer $f_B\circ f_A=f_B\big(f_A(x_1,x_2)\big)$ porque los originales de f_B son de $\mathbb{R}^3$, mientras que los elementos de f_A (x_1, x_2) son de $\mathbb{R}^2$.

$f_B:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$	$f_A:\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$
$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 0 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} \to \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ x_2 + 2x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

Sí es posible hacer $f_A \circ f_B = f_A\left(f_B(x_1, x_2, x_3)\right) = f_A(0, x_2 + 2x_3) = (0, 0)$.

Con este ejemplo vemos que la composición de dos aplicaciones no nulas puede ser nula.

La matriz asociada a $f_A \circ f_B$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$$f_A\left(f_B\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ La opción B es cierta.

¿Cualquier aplicación se puede componer con otra que la deje invariante?.

Si, con la aplicación identidad, asociada a la matriz unidad$\Rightarrow$ La opción C es cierta.

4. Para que una matriz, $A = (a_{ij})$, real y cuadrada de orden dos conmute con $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ es necesario que: A) $a_{11} = a_{22}$; B) $a_{12} = a_{21}$; C) No pueden conmutar nunca; D) Conmutan siempre.

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ es el elemento unidad de $M_{2\times 2} \Rightarrow$ Cualquier matriz, A, de $M_{2\times 2}$ verifica $A2I = 2IA = 2IA$, es decir, $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$ para valores cualesquiera de los elementos de A.

$\Rightarrow$ Es correcta la opción D.

❖ Se podía haber llegado al mismo resultado haciendo directamente las multiplicaciones.

5. El conjunto de matrices $M(x) = \begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, siendo $a \neq 0$ un número real dado y x un número real cualquiera, con la operación de multiplicar verifica: A) Tiene elemento neutro; B) Cada elemento suyo tiene inverso; C) No es conmutativo; D) No es cierta ninguna de las anteriores.

¿Es conmutativo el producto?.

Para que el producto sea conmutativo se debe cumplir que $M(x)M(y) = M(y)M(x)$ para valores cualesquiera de x, y.

Veamos si se cumple:

Primer miembro:	Segundo miembro:
$\begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{y+x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y+x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Ambos miembros son iguales, por tanto, el producto es conmutativo.

$\Rightarrow$ Es falsa la opción C.

¿Existe elemento neutro?.

Si existe elemento neutro debe pertenecer al conjunto $M(x)$, es decir, hay algún valor real "e", tal que $M(e)$ cumple $M(e)M(x) = M(x)$.

$$M(e)M(x) = M(x) \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a^e & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Primer miembro:	Segundo miembro:
$\begin{pmatrix} a^e & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{e+x} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & e+x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para que ambos miembros sean iguales debe ser $e + x = x \Rightarrow e = 0$.

$\Rightarrow$ La matriz $M(0) = \begin{pmatrix} a^0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ es el elemento neutro o unidad (por la izquierda) del conjunto $M(x)$ para la multiplicación.

Por ser conmutativa no es necesario probar que también lo es por la derecha.

$\Rightarrow$ La opción A es cierta.

¿Existe elemento inverso para cada elemento del conjunto?.

Si existe matriz inversa $M(y)$ para cada matriz $M(x)$ debe cumplir $M(x)\,M(y) = M(0)$.

Primer miembro:	Segundo miembro:
$\begin{pmatrix} a^x & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^y & 0 & 0 \\ 0 & 1 & y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^{x+y} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & x+y \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$	$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

Para que ambos miembros sean iguales debe ser $x + y = 0 \Rightarrow y = -x$.

La matriz $M(-x)$ es la simétrica de $M(x)$ para la multiplicación.

$\Rightarrow$ La opción B es cierta.

6. Sabiendo que $A \in M_{3\times4}$ y $B \in M_{3\times4}$ son tales que $a_{ij} = i + 2j$ y $b_{ij} = 2i - j$, las matrices $A + 2B$ y $-2A + B$ son: A) Inversas; B) Diagonales; C) Simétricas y opuestas; D) Ninguna de las anteriores.

El elemento de $A + 2B$ que ocupa el lugar (i, j) es de la forma $(i + 2j) + 2(2i - j) = 5i \Rightarrow$ Sólo depende de la fila que ocupe, no de la columna.

$$A+2B=\begin{pmatrix} 5 & 5 & 5 & 5 \\ 10 & 10 & 10 & 10 \\ 15 & 15 & 15 & 15 \end{pmatrix}.$$

El elemento de $-2A + B$ que ocupa el lugar (i, j) es de la forma $-2(i + 2j) + (2i - j) = -5j \Rightarrow$ Sólo depende de la columna que ocupe, no de la fila.

$$-2A+B=\begin{pmatrix} -5 & -10 & -15 & -20 \\ -5 & -10 & -15 & -20 \\ -5 & -10 & -15 & -20 \end{pmatrix}.$$

Es evidente que no son cuadradas $\Rightarrow$ No son inversas ni diagonales.

Para que fueran opuestas y simétricas debería cumplirse $c_{ij} = -c_{ji}$.

La condición anterior no es cierta.

Ejemplo: c_{14} no se puede comparar con c_{41} porque c_{41} no existe.

$\Rightarrow$ La opción correcta es D.

7. Si I es la matriz unidad de orden 2, y A es una matriz cuadrada de orden 2, tal que, $a_{11} = 0$, para que se verifique que $A^2 = -I$ debe ocurrir: A) $a_{11} = 0$, $a_{22} = 0$ y $a_{12}a_{21} = 1$; B) $a_{11} = 0$ y $a_{12}a_{21} = -1$; C) $a_{22} = 0$ y $a_{12}a_{21} = -1$; D) Una relación entre los elementos de A distinta a las anteriores.

$$\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow a_{22} = 0, a_{12}a_{21} = -1.$$

$\Rightarrow$ Es correcta la opción C.

8. Sabiendo que A es una matriz regular que verifica $A^2 - 3A + I = 0$, es cierto que A^{-1} vale: A) $3I - A$; B) $I - A$; C) $A - 3I$; D) Ninguno de los valores anteriores.

❖ Una forma de hacerlo es deducir el valor de A^{-1} desde la expresión $A^2 - 3A + I = 0$.

$$A^2 - 3A + I = 0 \Leftrightarrow A^{-1}(AA - 3A + I) = A^{-1}0 \Leftrightarrow A - 3I + A^{-1} = 0 \Leftrightarrow A^{-1} = 3I - A.$$

$\Rightarrow$ Es correcta la opción A.

❖ Segundo procedimiento: A la misma conclusión se llegaría al comprobar en cada una de las opciones A, B, C si A por el valor propuesto para A^{-1} es I, o no, sabiendo que $I = 3A - A^2$.

$A(3I - A) = 3A - A^2 = I$ y $(3I - A)A = 3A - A^2 = I \Rightarrow$ Es correcta la opción A.

$A(I - A) = A - A^2 \neq I \Rightarrow$ Es falsa la opción B.

$A(A - 3I) = A^2 - 3A = -I \neq I \Rightarrow$ Es falsa la opción C.

9. Si $A = \begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$, se verifica: A) $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ 1 & a^n \end{pmatrix}$; B) $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ n & a^n \end{pmatrix}$;

C) $A^n = \begin{pmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

¿Es posible eliminar alguna opción con operaciones sencillas?.

Para $n = 1 : A^1 = \begin{pmatrix} a^1 & 0 \\ 1 & a^1 \end{pmatrix}$.

Valor de a	Valor correcto	Valor obtenido con la opción A	Valor obtenido con la opción B	Valor obtenido con la opción C
Cualquiera	$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$	$A=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}$

Valen las opciones A, B, C, no podemos decir que es falsa ninguna.

Para $n=2: A^2=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2a & a^2 \end{pmatrix}$

Valor de a	Valor correcto	Valor obtenido con la opción A	Valor obtenido con la opción B	Valor obtenido con la opción C
$a=3$	$A^2=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$	$A^2=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$	$A^2=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 2 & 9 \end{pmatrix}$	$A^2=\begin{pmatrix} 9 & 0 \\ 6 & 9 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow$ Son falsas las opciones A y B.

La opción C es cierta para $n=2$, para los valores que hemos comprobado hasta ahora, pero eso no permite asegurar que lo sea para cualquier valor de n superior a 2.

Para $n=3$

$A^3=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 2a & a^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^3 & 0 \\ 3a^2 & a^3 \end{pmatrix}\Rightarrow$La opción C vale para algunos valores bajos de n.

Podemos seguir comprobando si la opción C sigue siendo válida al aumentar n, pero seguiríamos sin tener la certeza de si vale, o no, para algún valor en el que no lo hayamos comprobado.

❖ El método de inducción soluciona esa incertidumbre suponiendo que la expresión es cierta para $n-1$, y, comprobando que entonces es cierta para n:

Supongamos que la expresión es cierta para $n-1$

$$\Rightarrow A^{n-1}=\begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 \\ (n-1)a^{n-2} & a^{n-1} \end{pmatrix}.$$

Comprobemos que, entonces es cierta para n:

$A^n=\begin{pmatrix} a & 0 \\ 1 & a \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a^{n-1} & 0 \\ (n-1)a^{n-2} & a^{n-1} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} a^n & 0 \\ na^{n-1} & a^n \end{pmatrix}$, es decir, la fórmula dada en la opción C es cierta para cualquier valor de n.

10. Si $A=\begin{pmatrix} -2 & 4 & 2 & 1 \\ 4 & 2 & 1 & -2 \\ 2 & 1 & -2 & 4 \\ 1 & -2 & 4 & 2 \end{pmatrix}$, se verifica: A) $A^2 = 25I$; B) $A^{-1} = 25A$; C) $A + A^{-1} = 26A^{-1}$; D) Ninguna de las anteriores.

Una vez comprobado que $AA=\begin{pmatrix} 25 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 25 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 25 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 25 \end{pmatrix}=25\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}=25I$,

para dar la respuesta correcta es suficiente observar que: $A.A = 25I$.

$$AA=25I \Leftrightarrow \frac{AA}{25}=I \Leftrightarrow \left(\frac{A}{25}\right)A=I \Leftrightarrow A^{-1}=\frac{A}{25} \Leftrightarrow A=25A^{-1} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow A+A^{-1}=26A^{-1}.$$

$\Rightarrow$ Son opciones correctas A y C.

11. Si A, B son matrices regulares que verifican $M = A.B$, es cierto que: A) $B^{-1} = M^{-1}A$; B) $A^{-1} = M^{-1}B^{-1}$; C) $M^{-1} = A^{-1}B^{-1}$; D) Ninguna de las opciones anteriores.

¿Cómo se calcula M^{-1}?.

$$M^{-1} = (AB)^{-1} \Leftrightarrow MM^{-1} = (AB)M^{-1} = I \Leftrightarrow A^{-1}ABM^{-1} = A^{-1} \Leftrightarrow BM^{-1} = A^{-1} \Leftrightarrow$$
$$\Leftrightarrow B^{-1}BM^{-1} = B^{-1}A^{-1} \Leftrightarrow M^{-1} = B^{-1}A^{-1}.$$

$\Rightarrow$ La opción C es falsa porque el producto de matrices no es conmutativo.
Al sustituir M^{-1} por $B^{-1}A^{-1}$ en la opción A se verifica:

$B^{-1} = M^{-1}A \Leftrightarrow B^{-1} = B^{-1}A^{-1}A \Leftrightarrow B^{-1} = B^{-1}$, que es cierto siempre.

$\Rightarrow$ La opción A es correcta.

Al sustituir M^{-1} por $B^{-1}A^{-1}$ en la opción B se verifica:

$A^{-1} = M^{-1}B \Leftrightarrow A^{-1} = B^{-1}A^{-1}B.$

$\Rightarrow$ La opción B no es correcta porque el producto de matrices no es conmutativo.

12. Si A es la matriz real $\begin{pmatrix} 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & b \\ c & 0 & 0 \end{pmatrix}$, es cierto que: A) A^2 es una matriz escalar; B) A^3 es una matriz escalar; C) A^n es una matriz escalar para cualquier numero natural n; D) Hay un valor de n a partir del cual A^n es una matriz escalar.

Es suficiente hacer las potencias de la matriz dada para comprobar que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & ab \\ bc & 0 & 0 \\ 0 & ac & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ Las opciones A y C son falsas.

$$A^3 = \begin{pmatrix} abc & 0 & 0 \\ 0 & abc & 0 \\ 0 & 0 & abc \end{pmatrix} \Rightarrow \text{La opción B es cierta.}$$

Se puede comprobar que A^n no es escalar cuando n no es múltiplo de 3 $\Rightarrow$ La opción D es falsa.

Ejercicios relativos a:

"Subespacios núcleo e imagen de una aplicación lineal."

1. Si $f:\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ / $f(1, 0, 0) = (1, 1)$; $f(0, 1, 0) = (1, 1)$; $f(0, 0, 1) = (1, 0)$ es una aplicación lineal, se verifica: A) El núcleo de la aplicación es $\{(x_1, x_2, x_3) / x_1 = -x_2, x_3 = 0\}$; B) La dimensión de núcleo es 0; C) El núcleo es el subespacio $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; D) Ninguna de las anteriores. (Con las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^2$)

En el ejercicio 1 de cap. 2-2 se encontraron:

a) Matriz de la aplicación f: $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

b) Ecuaciones de la aplicación f: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 + x_2 + x_3 \\ y_2 = x_1 + x_2 \end{cases}$.

El núcleo de la aplicación está formado por los vectores cuya imagen es (0, 0), es decir, las soluciones del sistema:

$$\begin{cases} 0 = x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 = x_1 + x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \{(x_1, x_2, x_3) / x_1 = -x_2, x_3 = 0\}.$$

Sus ecuaciones cartesianas son $\begin{cases} 0 = x_1 + x_2 + x_3 \\ 0 = x_1 + x_2 \end{cases}$.

Unas ecuaciones paramétricas del núcleo son $\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -\alpha. \\ x_3 = 0 \end{cases}$

Todos los vectores del núcleo son de la forma: $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \{(1,-1,0)\}$ es una base.

Cualquier base del núcleo tiene un solo elemento $\Rightarrow$ Dimensión del núcleo = 1.

$\Rightarrow$ Sólo es correcta la opción A.

2. Si $M_{2\times2}$ es el espacio vectorial de matrices cuadradas reales de orden 2, $f : M_{2\times2} \to M_{2\times2}$ la aplicación lineal definida por $f(A) = AM - MA$ y $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$, se verifica que es base del núcleo de la aplicación:

A) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$; B) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$; C) $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\right\}$;

D) Ninguno de los conjuntos anteriores.

¿Ecuaciones de la aplicación?.

$$\begin{pmatrix} y_1 & y_2 \\ y_3 & y_4 \end{pmatrix} = f\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} -2x_3 & 2x_1 + 2x_2 - 2x_4 \\ -2x_3 & 2x_3 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + x_3\begin{pmatrix} -2 & 0 \\ -2 & 2 \end{pmatrix} + x_4\begin{pmatrix} 0 & -2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Ecuaciones del núcleo?.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2x_3 & 2x_1 + 2x_2 - 2x_4 \\ -2x_3 & 2x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} x_3 = 0 \\ 2x_1 + 2x_2 - 2x_4 = 0 \end{cases}$$

Las matrices de núcleo se pueden expresar como:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 \\ x_3 & x_4 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Base del núcleo?.

La base está formada por dos matrices linealmente independientes de $M_{2\times2}$ que verifiquen las ecuaciones del núcleo.

$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$ reúne esas características, se ha obtenido cuando tomamos $x_1 = 1, x_2 = 0$ para la primera matriz y $x_1 = 0, x_2 = 1$ para la segunda.

$\Rightarrow$ Sólo es correcta la opción B.

3. Si $f : M_{2\times2} \to \mathbb{R}^2$ es una aplicación lineal, tal que, $f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (a+d, 0)$, es cierto que: A) El núcleo es de dimensión tres; B) La imagen es de dimensión cuatro; C) El núcleo es $\{(0, 0)\}$; D) La imagen es $\mathbb{R}^2$.

❖ La aplicación f asigna a cada matriz real $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de $M_{2\times2}$ el par $(a + d, 0)$ de $\mathbb{R}^2$.

¿Núcleo de f?.

Son las matrices de $M_{2\times2}$ cuya imagen es (0, 0):

$f\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = (0,0) \Rightarrow a+d=0 \Rightarrow a=-d$. Para c y b no es necesaria ninguna condición, es decir, pueden tener cualquier valor.

Núcleo de $f = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} \right\}$ siendo a, b, c números reales.

$\Rightarrow$ Es falsa la opción C.

¿Base del núcleo de f?.

Cualquier elemento del núcleo de f es la combinación lineal siguiente:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & -a \end{pmatrix} = a\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + c\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\left\{ \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base del núcleo porque las matrices $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ son sistema generador y linealmente independientes.

¿Dimensión del núcleo de f?.

La dimensión es tres.

$\Rightarrow$ Es cierta la opción A.

¿Dimensión de imagen de f?.

f debe verificar:

dimensión núcleo de f + dimensión imagen de f = dimensión espacio original,

3 + dimensión imagen de $f = 4 \Rightarrow$ Dimensión imagen de $f = 1$.

$\Rightarrow$ Son falsas las opciones B y D.

La opción B es desechable a simple vista porque imagen de f es un subconjunto de $\mathbb{R}^2 \Rightarrow$ Dimensión imagen de $f \leq 2$.

4. En el ejercicio 4 de cap. 2-1 se define la aplicación lineal $f(a + bx + cx^2) = (a + bx + cx^2) + (c + bx + ax^2)$ del espacio vectorial de polinomios de grado menor o igual que dos en sí mismo, cuyo núcleo verifica: A) Es el vector $-1 + x^2$; B) Es el vector $0 + 0x + 0x^2$; C) Es tal que los vectores de las opciones A y B pertenecen a él; D) Ninguna de las anteriores.

$\{1, x, x^2\}$ es la base canónica, las imágenes de los vectores de la base canónica son:

$$1 \xrightarrow{f} 1 + x^2$$
$$1 \xrightarrow{f} 2x$$
$$x^2 \xrightarrow{f} 1 + x^2$$

¿Matriz asociada a la aplicación?.

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Núcleo f?.

Está formado por los vectores $a + bx + cx^2$, que expresaremos mediante sus coordenadas (a, b, c), tales que $f(a + bx + cx^2) = 0 + 0x + 0x^2 = (0, 0, 0)$, es decir, que verifican:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow b = 0, a + c = 0.$$

Es evidente que esta condición la cumplen $-1 + x^2$ y $0 + 0x + 0x^2 \Rightarrow$ La opción C es cierta.

La opción A es falsa, ya que $0 + 0x + 0x^2$ está siempre en el núcleo por ser el vector nulo del conjunto.

La opción B también es falsa, porque $-1 + x^2$ está en el núcleo, como se ha visto.

La D no es cierta porque lo es la C.

❖ En este caso, que es muy sencillo, se podía haber hecho directamente:

Núcleo $f = \{(a + bx + cx^2) / (a + bx + cx^2) + (c + bx + ax^2) = 0 + 0x + 0x^2\}$, es decir, $a + c + 2bx + (a + c)\, x^2 = 0 + 0x + 0x^2$.

$\Rightarrow b = 0,\ a + c = 0.$

5. Unas ecuaciones paramétricas de la base del núcleo de la aplicación lineal $f : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2$, tal que, $f(x_1, x_2, x_3, x_4) = (x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_3 - x_4)$ pueden ser: A) $x_1 = -\alpha + \beta;\ x_2 = 2\alpha - \beta;\ x_3 = \alpha;\ x_4 = \beta$; B) $x_1 = \alpha;\ x_2 = \beta;\ x_3 = \alpha + \beta;\ x_4 = 2\alpha + \beta$; C) Otras diferentes a las dadas en opciones anteriores; D) Las paramétricas de un espacio vectorial son únicas.

¿Matriz asociada a f?.

Imágenes de los elementos de la base de $\mathbb{R}^4$:	Matriz asociada a f:
$f(1, 0, 0, 0) = (1, 1)$ $f(0, 1, 0, 0) = (1, 0)$ $f(0, 0, 1, 0) = (-1, 1)$ $f(0, 0, 0, 1) = (0, -1)$	$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$

¿Ecuaciones de f?.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix}.$$

¿Ecuaciones del núcleo de f?.

$$\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1 & -1 & 0\\1 & 0 & 1 & -1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0\\x_1+x_3-x_4=0\end{cases}$$

Si tomamos como parámetros $x_3=\alpha$ y $x_4=\beta$ en el sistema $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0\\x_1+x_3-x_4=0\end{cases}$ se obtienen las paramétricas $\begin{cases}x_1=-\alpha+\beta\\x_2=2\alpha-\beta\\x_3=\alpha\\x_4=\beta\end{cases}$.

$\Rightarrow$ La opción A es cierta.

Si tomamos como parámetros $x_1=\alpha$ y $x_2=\beta$ en el sistema $\begin{cases}x_1+x_2-x_3=0\\x_1+x_3-x_4=0\end{cases}$ se obtienen las paramétricas $\begin{cases}x_1=\alpha\\x_2=\beta\\x_3=\alpha+\beta\\x_4=2\alpha+\beta\end{cases}$.

$\Rightarrow$ La opción B es cierta.

Si hubiéramos tomado otro par de variables como parámetros, habríamos obtenido otras paramétricas $\Rightarrow$ La opción C es cierta.

$\Rightarrow$ La opción D es falsa.

6. Si $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1, x_2, 0)$, el núcleo de f verifica: A) Es $\{(0, 0, 0)\}$; B) Es el eje x_3; C) Es el plano que contiene los ejes x_1, x_2; D) Ninguno de los conjuntos anteriores.

❖ La imagen de esta aplicación son vectores cuya tercera coordenada es 0, es decir, el plano que contiene los ejes x_1 y x_2.

❖ Es evidente que, para que $(x_1, x_2, 0) = (0, 0, 0)$ debe ser $x_1 = x_2 = 0$, mientras x_3 puede tener cualquier valor, es decir, el núcleo es el eje $x_3 \Rightarrow$ Sólo es correcta la opción B.

7. Si $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$ es la aplicación lineal, tal que, $f(1, 0, 0, 0) = (1, -1, 2)$, $f(0, 1, 0, 0) = (2, 1, 1)$, $f(0, 0, 1, 0) = (4, -1, 5)$, $f(0, 0, 0, 1) = (-1, -5, 4)$, es cierto que: A) El rango de la aplicación es tres; B) El rango de la aplicación es cuatro; C) El número de parámetros independientes que hay en las ecuaciones paramétricas de la imagen es uno; D) El número de ecuaciones cartesianas independientes que definen f es uno.

¿Expresión analítica de imagen de f?.

$$\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} y_1 = x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \\ y_2 = -x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 \\ y_3 = 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 \end{cases} \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + x_3 \begin{pmatrix} 4 \\ -1 \\ 5 \end{pmatrix} + x_4 \begin{pmatrix} -1 \\ -5 \\ 4 \end{pmatrix}.$$

❖ Se trata de encontrar una base del conjunto de vectores (y_1, y_2, y_3) de $\mathbb{R}^3$, obtenidos a partir de cualquier vector (x_1, x_2, x_3, x_4) de $\mathbb{R}^4$.

¿Base de imagen de f?.

En el conjunto de los vectores {(1, –1, 2), (2, 1, 1), (4, –1, 5), (–1, –5, 4)}, cualquier subconjunto de dos linealmente independientes forma una base de la imagen de f, como puede comprobarse fácilmente.

Por ejemplo {(1, –1, 2), (2, 1, 1)}.

¿Rango de la aplicación?.

Número de vectores de cualquier base imagen de f = Dimensión de imagen de f = Rango de la aplicación = Rango de la matriz asociada = 2.

Las opciones A, B y C son falsas.

¿Ecuaciones paramétricas de imagen de f?.

Si elegimos {(1, –1, 2), (2, 1, 1)} como base, cualquier vector de imagen de f se puede expresar como $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = \lambda + 2\mu \\ x_2 = -\lambda + \mu \\ x_3 = 2\lambda + \mu \end{cases}$, que son unas ecuaciones paramétricas de la imagen.

¿Ecuaciones cartesianas de imagen de f?.

Se obtienen al eliminar los parámetros λ, μ de las ecuaciones paramétricas.

En el caso de que tomemos las paramétricas $\begin{cases} x_1 = \lambda + 2\mu \\ x_2 = -\lambda + \mu \\ x_3 = 2\lambda + \mu \end{cases}$ es suficiente observar que $\lambda + 2\mu = (-\lambda + \mu) + (2\lambda + \mu)$, es decir, $x_1 = x_2 + x_3$.

$\Rightarrow$ La opción D es cierta.

8. Si f es la aplicación lineal definida en el ejercicio anterior, es cierto que: A) La dimensión del núcleo es uno; B) El núcleo es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$;

C) El número de parámetros que hay en las ecuaciones paramétricas del núcleo es tres; D) El núcleo es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$.

¿Es el núcleo un subespacio?.

Sabemos que si $f: \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^3$, el núcleo es subespacio vectorial de $\mathbb{R}^4$, mientras que la imagen lo es de $\mathbb{R}^3$.

La demostración es muy fácil:

Vamos a comprobar que Nuc(f) verifica las condiciones que caracterizan un subespacio, para $f: V \to W$

a) Si $\overline{v}_1, \overline{v}_2 \in \text{Nuc}(f) \Rightarrow f(\overline{v}_1 + \overline{v}_2) = f(\overline{v}_1) + f(\overline{v}_2)$ por ser f una aplicación lineal; como $f(\overline{v}_1) + f(\overline{v}_2) = \overline{0} + \overline{0} = \overline{0} \in W \Rightarrow \overline{v}_1 + \overline{v}_2 \in \text{Nuc}(f)$.

b) También se verifica: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall \overline{v} \in \text{Nuc}\,(f) \Rightarrow f(\lambda \overline{v}) = \lambda f(\overline{v}) = \overline{0} \Rightarrow$
$\Rightarrow \lambda \overline{v} \in \text{Nuc}(f)$, por tanto, Nuc($f$), es un subespacio de V.

$\Rightarrow$ Es cierta la opción B y falsa la D.

¿Expresión analítica de núcleo de f?.

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 4 & -1 \\ -1 & 1 & -1 & -5 \\ 2 & 1 & 5 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \\ 0 = -x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 \\ 0 = 2x_1 + x_2 + 5x_3 + 4x_4 \end{cases}.$$

¿Ecuaciones paramétricas del núcleo?.

❖ Se trata de encontrar los vectores (x_1, x_2, x_3, x_4) de $\mathbb{R}^4$ que son solución del sistema anterior.

En dicho sistema la tercera ecuación es el resultado de restar la segunda a la primera, por tanto se puede prescindir de ella.

En el sistema resultante $\begin{cases} 0 = x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 \\ 0 = -x_1 + x_2 - x_3 - 5x_4 \end{cases}$, podemos tomar como variables principales x_1, x_2 y la otras dos variables como parámetros:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4x_3 + x_4 \\ -x_1 + x_2 = x_3 + 5x_4 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4\lambda + \mu \\ -x_1 + x_2 = \lambda + 5\mu \end{cases} \text{siendo } x_3 = \lambda, x_4 = \mu.$$

Al resolver por cualquier método elemental el sistema $\begin{cases} x_1 + 2x_2 = -4\lambda + \mu \\ -x_1 + x_2 = \lambda + 5\mu \end{cases}$, se obtiene $x_1 = -2\lambda - 3\mu$, $x_2 = -\lambda + 2\mu$.

Todas las coordenadas del vector (x_1, x_2, x_3, x_4) se pueden escribir en función de los parámetros λ, μ: $\begin{cases} x_1 = -2\lambda - 3\mu \\ x_2 = -\lambda + 2\mu \\ x_3 = \lambda \\ x_4 = \mu \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \mu \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$

El vector (x_1, x_2, x_3, x_4) es combinación lineal de los vectores de $\{(-2, -1, 1, 0), (-3, 2, 0, 1)\}$, que son base.

La dimensión del núcleo de f es 2.

$\Rightarrow$ Son incorrectas las opciones A y C.

Ejercicios relativos a:

"Cambios de base y matrices asociadas."

1. Si $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ y $B'=\{\bar{e}_1',\bar{e}_2',\bar{e}_3'\}$ son bases de $\mathbb{R}^3$, relacionadas por $\bar{e}_1'=\bar{e}_1+\bar{e}_2$ y $\bar{e}_2'=\bar{e}_2+\bar{e}_3$, sabiendo que $\bar{x}$ es un vector, tal que. $\bar{x}=(6.5.7)_B=(2,3,4)_{B'}$, se verifica: A) $\bar{e}_3'=(0.0,1)_{B'}$; B) $\bar{e}_3'=(1.0,1)_B$; C) $\bar{e}_3'=(0,0,1)_B$; D) Ninguna de las anteriores.

Sabemos que:

$$\bar{e}_1'=\begin{cases}(1,0,0)_{B'}\\(1,1,0)_B\end{cases};\ \bar{e}_2'=\begin{cases}(0,1,0)_{B'}\\(0,1,1)_B\end{cases};\ \bar{e}_3'=\begin{cases}(0,0,1)_{B'}\\(\alpha,\beta,\delta)_B\end{cases}\Rightarrow \text{Es correcta la opción A.}$$

$$\bar{x}=\begin{cases}(6,5,7)_B=6\bar{e}_1+5\bar{e}_2+7\bar{e}_3 & (i)\\(2,3,4)_{B'}=2\bar{e}_1'+3\bar{e}_2'+4\bar{e}_3' & (ii)\end{cases}$$

Sustituyendo $\bar{e}_1'$ por $\bar{e}_1+\bar{e}_2$, $\bar{e}_2'$ por $\bar{e}_2+\bar{e}_3$, y, $\bar{e}_3'$ por $\alpha\bar{e}_1+\beta\bar{e}_2+\delta\bar{e}_3$ en (ii) se obtiene:

$$2\bar{e}_1'+3\bar{e}_2'+4\bar{e}_3'=2(\bar{e}_1+\bar{e}_2)+3(\bar{e}_2+\bar{e}_3)+4(\alpha\bar{e}_1+\beta\bar{e}_2+\delta\bar{e}_3)=$$
$$=\bar{e}_1(2+4\alpha)+\bar{e}_2(2+3+4\beta)+\bar{e}_3(3+4\delta)\qquad (iii)$$

❖ (i) e (iii) son expresiones de $\bar{x}$ en base B, por tanto son iguales.

$$6\bar{e}_1+5\bar{e}_2+7\bar{e}_3=(2+4\alpha)\bar{e}_1+(5+4\beta)\bar{e}_2+(3+4\delta)\bar{e}_3\Rightarrow\begin{cases}2+4\alpha=6\\5+4\beta=5\\3+4\delta=7\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}\alpha=1\\\beta=0.\\\delta=1\end{cases}$$

$\Rightarrow$ Es correcta la opción B, y falsas C y D.

2. Si en $\mathbb{R}^3$ se considera la base $B' = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 0, 0)\}$, sabiendo que $(1, 2, 3)$ son las coordenadas de un vector $\overline{x}$ respecto a B', se verifica que las coordenadas de $\overline{x}$ respecto a la base canónica B son: A) $(-1, 2, -3)$; B) $(-2, 2, 3)$; C) $(2, 1, 3)$; D) Ninguna de las anteriores.

Las coordenadas dadas de los vectores de B' están referidas a la base canónica B.

Las coordenadas de los vectores de B' en la base B' son $(1, 0, 0)$, $(0, 1, 0)$ y $(0, 0, 1)$:

$$(1,0,0)_{B'} = 1(1,0,1)_B + 0(0,1,1)_B + 0(-1,0,0)_B$$
$$(0,1,0)_{B'} = 0(1,0,1)_B + 1(0,1,1)_B + 0(-1,0,0)_B$$
$$(0,0,1)_{B'} = 0(1,0,1)_B + 0(0,1,1)_B + 1(-1,0,0)_B$$

$$\overline{x}_{B'} = (1,2,3)_{B'} = 1(1,0,1)_B + 2(0,1,1)_B + 3(-1,0,0)_B = (-2,2,3)_B.$$

$\Rightarrow$ Sólo es correcta la opción B.

3. Con las bases dadas en el ejercicio anterior, es cierto que, la matriz de cambio para pasar de las coordenadas de un vector cualquiera respecto a B' a las coordenadas respecto a B es: A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ El problema planteado es encontrar la matriz $Q_{B'B}$ asociada a la transformación identidad, que transforma cualquier vector en sí mismo, aunque su expresión es distinta según la base empleada:

$(\mathbb{R}^3, B') \xrightarrow{i} (\mathbb{R}^3, B)$.

$(1,0,0)_{B'} \longrightarrow (1,0,1)_B$

$(0,1.0)_{B'} \longrightarrow (0,1,1)_B$

$(0,0,1)_{B'} \longrightarrow (-1,0,0)_B$

❖ La matriz $Q_{B'B}$ se utiliza en la fórmula para pasar de las coordenadas respecto a B' a las coordenadas respecto a B : $\overline{x}_B = Q_{B'B}\overline{x}_{B'}$.

¿Matriz $Q_{B'B}$ del cambio de base?.

$$Q_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ Es correcta la opción A.

4. Resuélvase el ejercicio 2 del capítulo 2-5 utilizando las ecuaciones del cambio de base.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1' \\ x_2' \\ x_3' \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = x_1' - x_3' \\ x_2 = x_2' \\ x_3 = x_1' + x_2' \end{cases}$$

❖ El vector $\overline{x}$ es independiente de la base utilizada, pero su expresión sí depende de la base.

Si utilizamos la base B' las coordenadas de $\overline{x}$ son (1, 2, 3), es decir:
$\overline{x}_{B'} = (x_1', x_2', x_3') = (1,2,3)_{B'}$.

Si utilizamos la base B las coordenadas de $\overline{x}$ son $\overline{x}_B = (x_1, x_2, x_3)$.

Para calcular $\bar{x}_B$ debemos hacer la sustitución de (x_1', x_2', x_3') en la expresión anterior:

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 = -2 \\ x_2 = 2 \\ x_3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \bar{x}_B = (x_1, x_2, x_3) = (-2,2,3)_B.$$

5. En las mismas condiciones del ejercicio 3 del capítulo 2-5 es cierto que la matriz de cambio para pasar de las coordenadas de un vector cualquiera en base B a las coordenadas en base B' es: A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ El problema planteado es encontrar la matriz $Q_{BB'}$, asociada a la transformación $(\mathbb{R}^3, B) \to (\mathbb{R}^3, B')$, que se utiliza en la fórmula para pasar las coordenadas en base B a las coordenadas en base B' : $\bar{x}_{B'} = Q_{BB'}\bar{x}_B$.

La matriz del cambio de base para pasar de B' a B es $Q_{B'B}$.
Para pasar de las coordenadas de un vector en base B a las coordenadas en base B' necesitamos la matriz $Q_{BB'}$, que es la matriz inversa de la dada.

Las matrices utilizadas en los cambios están expresadas en el gráfico:

$$(\mathbb{R}^3, B') \xrightarrow{Q_{B'B}} (\mathbb{R}^3, B) \xrightarrow{Q_{BB'}} (\mathbb{R}^3, B')$$
$$\bar{x}_B \to \quad \bar{x}_B = Q_{B'B}\bar{x}_{B'} \to \bar{x}_{B'} = Q_{BB'}\bar{x}_B = Q_{BB'}Q_{B'B}\bar{x}_{B'} \Rightarrow Q_{BB'}Q_{B'B} = I.$$

¿Matriz $Q_{BB'}$ del cambio de base?.

$$Q_{BB'} = Q_{B'B}^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}^{-1}$$

❖ Hay formas rápidas de hacer la inversa de una matriz, que estudiaremos en capítulos siguientes, pero ahora vamos a encontrarla directamente.

$Q_{BB'}$ es una matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B expresados en la base B'.

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 1 = \alpha - \gamma \\ 0 = \beta \\ 0 = \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 0 = \alpha \\ 0 = \beta \\ -1 = \gamma \end{cases} \Rightarrow Q_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & \cdots & \cdots \\ 0 & \cdots & \cdots \\ -1 & \cdots & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \alpha - \gamma \\ 1 = \beta \\ 0 = \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} -1 = \alpha \\ 1 = \beta \\ -1 = \gamma \end{cases} \Rightarrow Q_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & \cdots \\ 0 & 1 & \cdots \\ -1 & -1 & \cdots \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \gamma \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = \alpha - \gamma \\ 0 = \beta \\ 1 = \alpha + \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1 = \alpha \\ 0 = \beta \\ 1 = \gamma \end{cases} \Rightarrow Q_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

❖ Se podía haber hecho de una sola vez por el procedimiento siguiente:

Si $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ y $\{\bar{e}_1', \bar{e}_2', \bar{e}_3'\}$, los vectores de las dos bases cumplen que:

$$\begin{cases} \bar{e}_1' = \bar{e}_1 + \bar{e}_3 \\ \bar{e}_2' = \bar{e}_2 + \bar{e}_3 \\ \bar{e}_3' = -\bar{e}_1 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \bar{e}_1 = -\bar{e}_3' \\ \bar{e}_2 = -\bar{e}_1' + \bar{e}_2' - \bar{e}_3' \\ \bar{e}_3 = \bar{e}_1' + \bar{e}_3' \end{cases} \Rightarrow Q_{BB'} = \begin{pmatrix} 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 1 \end{pmatrix}.$$

⇒ Es correcta la opción B.

6. $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3 / f(x_1\ x_2, x_3) = (x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_1)$ es una aplicación lineal referida a la base canónica B. Cuando la expresión de f se refiere a la base $B' = \{(1, 0, 1), (0, 1, 1), (-1, 0, 0)\}$ de ejercicios anteriores, sus ecuaciones son: A) $f(x_1, x_2, x_3) = (x_1 + x_2 + x_3, x_1 - x_2, -3x_1 + x_2)$; B) $f(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1, x_1 - x_2, 0)$; C) $f(x_1, x_2, x_3) = (-2x_1 + 2x_2 + 2x_3, x_1 - x_2 - x_3, -3x_1 + 2x_2 + 3x_3)$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ El primer problema es encontrar la matriz A que permite pasar de un vector en base B a su imagen en la misma base $B, f: (\mathbb{R}^3, B) \xrightarrow{A} (\mathbb{R}^3, B)$.

¿Matriz asociada a la aplicación en base B?.

$$f:(x_1,x_2,x_3) \longrightarrow (x_1, x_1 - x_2, x_2 - x_1)$$
$$(1,0,0) \longrightarrow (1,1,-1)$$
$$(0,1,0) \longrightarrow (0,-1,1)$$
$$(0,0,1) \longrightarrow (0,0,0)$$

La matriz asociada a la aplicación es: $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$.

¿Expresión matricial de la aplicación?.

La expresión matricial de la aplicación dada es: $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.

¿Matriz de la aplicación en la base B'?.

❖ El problema es encontrar la matriz A' que permite pasar de un vector en base B' a su imagen en la misma base $B': (\mathbb{R}^3, B') \xrightarrow{A'} (\mathbb{R}^3, B')$.

El gráfico siguiente muestra el conjunto de las matrices asociadas a cada una de las aplicaciones realizadas en los ejercicios anteriores:

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^3,B) & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3,B)\\ \uparrow Q_{B'B} & & Q_{BB'}\downarrow\uparrow Q_{B'B}\\ (\mathbb{R}^3,B') & \xrightarrow{A'} & (\mathbb{R}^3,B')\end{array}$$

En ejercicios anteriores hemos calculado $Q_{B'B}$ y $Q_{BB'}$, y, en éste A.

La transformación $(\mathbb{R}^3,B')\xrightarrow{A'}(\mathbb{R}^3,B')$ es la aplicación sucesiva de $(\mathbb{R}^3,B')\xrightarrow{Q_{B'B}}(\mathbb{R}^3,B)$; $(\mathbb{R}^3,B)\xrightarrow{A}(\mathbb{R}^3,B)$; $(\mathbb{R}^3,B)\xrightarrow{Q_{BB'}}(\mathbb{R}^3,B')$, es decir, es la composición de las aplicaciones.

Si designamos cada aplicación por la matriz asociada, podemos escribir: $f_{A'}=i_{Q_{BB'}}\circ f_A\circ i_{Q_{B'B}}$, cuya matriz asociada es:

$$A'=Q_{BB'}AQ_{B'B}=\begin{pmatrix}0&-1&1\\0&1&0\\-1&-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&0\\1&-1&0\\-1&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&0&-1\\0&1&0\\1&1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&2\\1&-1&-1\\-3&2&3\end{pmatrix}.$$

¿Expresión matricial de la aplicación dada respecto a B'?.

$$\begin{pmatrix}y_1'\\y_2'\\y_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2&2&2\\1&-1&-1\\-3&2&3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1'\\x_2'\\x_3'\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-2x_1'+2x_2'+2x_3'\\x_1'-x_2'-x_3'\\-3x_1'+2x_2'+3x_3'\end{pmatrix}\Rightarrow$$ Es correcta la opción C.

❖ Aunque para mayor claridad hemos diferenciado las coordenadas en base B' utilizando (x_1',x_2',x_3'), generalmente no se hace esta diferencia y se escribe $f(x_1,x_2,x_3)_{B'}=(-2x_1+2x_2+2x_3,x_1-x_2-x_3,-3x_1+2x_2+3x_3)_{B'}$ o simplemente $f(x_1,x_2,x_3)=(-2x_1+2x_2+2x_3,x_1-x_2-x_3,-3x_1+2x_2+3x_3)$ diciendo que está referida la expresión a base B'.

7. Si $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2\}$ es base de $\mathbb{R}^2$, $U=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3\}$ es base de $\mathbb{R}^3$, y, $f:(\mathbb{R}^2, B)\to(\mathbb{R}^3, U)$ es la aplicación lineal, tal que, $\begin{cases} f(1,2)_B=(1,0,1)_U \\ f(0,1)_B=(2,1.0)_U \end{cases}$, es cierto que la matriz asociada a f es: A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

¿Tamaño de la matriz A asociada a $f:(\mathbb{R}^2, B)\to(\mathbb{R}^3, U)$*?.*

Cualquier base de $\mathbb{R}^2$ tiene 2 vectores $\Leftrightarrow A$ tiene 2 columnas

Los vectores de $\mathbb{R}^3$ tienen 3 coordenadas$\Leftrightarrow A$ tiene 3 filas.

$\Leftrightarrow A\in M_{3\times 2}$.

Son falsas las opciones B y C.

¿Matriz A asociada a $f:(\mathbb{R}^2, B)\to(\mathbb{R}^3, U)$*?.*

❖ Sus columnas son $f(\bar{e}_1)$ y $f(\bar{e}_2)$ expresadas en base U ($\bar{e}_1$ y $\bar{e}_2$ están en base B).

$\bar{e}_1=(1,0)_B$ y $\bar{e}_2=(0,1)_B$.

$$\begin{cases} f(1\bar{e}_1+2\bar{e}_2)=f(\bar{e}_1)+2f(\bar{e}_2)=\bar{u}_1+\bar{u}_3 \\ f(0\bar{e}_1+1\bar{e}_2)=f(\bar{e}_2)=2\bar{u}_1+\bar{u}_2 \end{cases}\Rightarrow \begin{cases} f(\bar{e}_1)=-3\bar{u}_1-2\bar{u}_1+\bar{u}_3 \\ f(\bar{e}_2)=2\bar{u}_1+\bar{u}_2 \end{cases}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow A=\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ La opción correcta es D.

La imagen de $(x_1, x_2)_B$ es $\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}_U = \begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}_B$.

8. Si $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2\}$ y $B' = \{\bar{e}_1', \bar{e}_2'\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$ cuyos vectores están relacionados por $\bar{e}_1' = \bar{e}_1 + \bar{e}_2$ y $\bar{e}_2' = \bar{e}_1 - \bar{e}_2$, es cierto que la matriz asociada al cambio de la base B' a la B es: A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

Recordemos que la aplicación identidad transforma cualquier vector en sí mismo, aunque su expresión es distinta según la base empleada.

$$\begin{aligned} i: (\mathbb{R}^2, B') &\longrightarrow (\mathbb{R}^2, B) \\ (1,0) &\longrightarrow (1,1) \\ (0,1) &\longrightarrow (1,-1) \end{aligned}$$

¿Matriz $Q_{B'B}$ del cambio de base?.

$Q_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow$ Es correcta la opción A.

Fórmula para pasar de las coordenadas de un vector en base B' al vector en base B: $\bar{x}_B = Q_{B'B}\bar{x}_{B'}$.

Fórmula aplicada a los vectores de las bases:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{B'}; \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}_B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{B'}.$$

9. Si $U=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3\}$ y $U'=\{\bar{u}_1',\bar{u}_2',\bar{u}_3'\}$ son bases de $\mathbb{R}^3$ cuyos vectores están relacionados por $\bar{u}_1'=\bar{u}_1+\bar{u}_3, \bar{u}_2'=\bar{u}_1-\bar{u}_2$ y $\bar{u}_3'=\bar{u}_2$, es cierto que la matriz asociada al cambio de la base U' a la base U es: A) $\begin{pmatrix}1&0&1\\1&-1&0\\0&1&0\end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix}0&1&1\\0&0&1\\1&-1&-1\end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&1&0\end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

$$(\mathbb{R}^3,U')\xrightarrow{i}(\mathbb{R}^3,U)$$
$$(1,0,0)\longrightarrow(1,0,1)$$
$$(0,1,0)\longrightarrow(1,-1,0)$$
$$(0,0,1)\longrightarrow(0,1,0)$$

¿Matriz $P_{U'U}$ del cambio de la base U' a la base U?.

$$P_{U'U}=\begin{pmatrix}1&1&0\\0&-1&1\\1&0&0\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Es correcta la opción D.

10. Si $U=\{\bar{u}_1,\bar{u}_2,\bar{u}_3\}$ y $U'=\{\bar{u}_1',\bar{u}_2',\bar{u}_3'\}$ son bases de $\mathbb{R}^3$ cuyos vectores están relacionados por $\bar{u}_1'=\bar{u}_1+\bar{u}_3, \bar{u}_2'=\bar{u}_1-\bar{u}_2$ y $\bar{u}_3'=\bar{u}_2$, es cierto que la

matriz asociada al cambio de la base U a la U' es: A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$;

B) $\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

$$(\mathbb{R}^3, U') \underset{P_{UU'}}{\overset{P_{U'U}}{\rightleftarrows}} (\mathbb{R}^3, U)$$

$P_{UU'}$ es la matriz inversa de $P_{U'U}$, que se puede calcular por el procedimiento siguiente o por cualquier otro.

$$\begin{cases} \overline{u}_1' = \overline{u}_1 + \overline{u}_3 \\ \overline{u}_2' = \overline{u}_1 - \overline{u}_2 \\ \overline{u}_3' = \overline{u}_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \overline{u}_1 = \overline{u}_2' + \overline{u}_3' \\ \overline{u}_2 = \overline{u}_3' \\ \overline{u}_3 = \overline{u}_1' - \overline{u}_2' - \overline{u}_3' \end{cases} \Rightarrow P_{UU'} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ La opción B es correcta.

11. En las condiciones de los ejercicios anteriores la matriz asociada a $f:(\mathbb{R}^2, B') \to (\mathbb{R}^3, U')$, es: A) $\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -6 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 4 \\ -2 & 1 \\ -3 & 2 \end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

El gráfico siguiente muestra el conjunto de las matrices asociadas a cada una de las aplicaciones realizadas en los ejercicios anteriores:

$$\begin{array}{ccc} (\mathbb{R}^2,B) & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^3,U) \\ \uparrow Q_{B'B} & & P_{UU'}\downarrow\uparrow P_{U'U} \\ (\mathbb{R}^2,B') & \xrightarrow{A'} & (\mathbb{R}^3,U') \end{array}$$

Al ejercicio 7 corresponde $(\mathbb{R}^2,B) \xrightarrow{A} (\mathbb{R}^3,U)$.

Al ejercicio 8 corresponde $(\mathbb{R}^2,B') \xrightarrow{Q_{B'B}} (\mathbb{R}^2,B)$.

Al ejercicio 9 corresponde $(\mathbb{R}^3,U') \xrightarrow{P_{U'U}} (\mathbb{R}^3,U)$.

Al ejercicio 10 corresponde $(\mathbb{R}^3,U) \xrightarrow{P_{UU'}} (\mathbb{R}^3,U')$.

La transformación $(\mathbb{R}^2,B') \xrightarrow{A'} (\mathbb{R}^3,U')$ es la aplicación sucesiva de $(\mathbb{R}^2,B') \xrightarrow{Q_{B'B}} (\mathbb{R}^2,B)$; $(\mathbb{R}^2,B) \xrightarrow{A} (\mathbb{R}^3,U)$; $(\mathbb{R}^3,U) \xrightarrow{P_{UU'}} (\mathbb{R}^3,U')$, es decir, es la composición de las aplicaciones.

Si designamos cada aplicación por la matriz asociada, podemos escribir:

$f_{A'} = i_{P_{UU'}} \circ f_A \circ i_{Q_{B'B}}$, cuya matriz asociada es $A' = P_{UU'}AQ_{B'B}$.

$$A' = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -3 & 2 \\ -2 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -2 & -6 \\ -3 & -9 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ Es correcta la opción B.

12. Si en el espacio vectorial $\wp_3$ de polinomios de grado menor que cuatro se considera la base $B' = \{1, x + 1, (x + 1)^2, x^3\}$ y la base canónica $B = \{1, x, x^2, x^3\}$, es cierto que la matriz de cambio de base B' a la base B es:

A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; C) Los espacios vectoriales de polino-

mios no admiten matrices de cambio de base; D) Ninguna de las anteriores.

¿Qué coordenadas tienen los elementos de B' en base B?.

$$1 = 1 + 0x + 0x^2 + 0x^3 = (1,0,0,0)$$
$$x + 1 = 1 + 1x + 0x^2 + 0x^3 = (1,1,0,0)$$
$$(x+1)^2 = 1 + 2x + 1x^2 + 0x^3 = (1,2,1,0)$$
$$x^3 = 0 + 0x + 0x^2 + 1x^3 = (0,0,0,1)$$

¿Matriz del cambio de la base B' a la base B?.

$$(\wp_3, B') \longrightarrow (\wp_3, B)$$
$$(1,0,0,0) \longrightarrow (1,0,0,0)$$
$$(0,1,0,0) \longrightarrow (1,1,0,0)$$
$$(0,0,1,0) \longrightarrow (1,2,1,0)$$
$$(0,0,0,1) \longrightarrow (0,0,0,1)$$

$$Q_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{Sólo la opción A es cierta.}$$

13. El subconjunto S de $M_{3\times3}$ formado por matrices diagonales es: A) Un espacio vectorial de dimensión tres; B) Un espacio vectorial de dimensión cuatro; C) No es espacio vectorial; D) No es subespacio de $M_{3\times3}$.

¿La suma de dos matrices diagonales es una matriz diagonal?.

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & b_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11}+b_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22}+b_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33}+b_{33} \end{pmatrix}.$$

¿El producto de un escalar por una matriz diagonal es una matriz diagonal?.

$$\lambda\begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & a_{33} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \lambda a_{11} & 0 & 0 \\ 0 & \lambda a_{22} & 0 \\ 0 & 0 & \lambda a_{33} \end{pmatrix}.$$

Es subespacio de $M_{3\times3}$, y por tanto es espacio vectorial.

$\Rightarrow$ Son falsas las opciones C y D.

¿Base canónica de $M_{3\times3}$?.

$$\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix},$$
$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}.$$

Son nueve matrices linealmente independientes, tales que, cualquier elemento de $M_{3\times3}$ es una combinación lineal de ellas:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} = a_{11}\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{12}\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{13}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + a_{21}\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} + \ldots$$

¿Dimensión de $M_{3\times3}$?.

Cualquier base de $M_{3\times3}$ está formada por nueve elementos, es decir, su dimensión es nueve.

¿Base canónica de S?.

$$B=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}\right\}.$$

Son tres matrices linealmente independientes, tales que, cualquier elemento de S es una combinación lineal de ellas:

$$\begin{pmatrix}a_{11}&0&0\\0&a_{22}&0\\0&0&a_{33}\end{pmatrix}=a_{11}\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+a_{22}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+a_{33}\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

¿Dimensión de S?.

Cualquier base de S está formada por tres elementos, es decir, su dimensión es tres.

$\Rightarrow$ Es cierta la opción A.

14. En el espacio vectorial S del ejercicio anterior se considera la base $B'=\left\{\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix},\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}\right\}$. Sabiendo que las coordenadas de una matriz M de S en base B' son $(1, 0, -1)$, es cierto que: A) Las coordenadas de M en la base B del ejercicio anterior son $(1, 0, 1)$; B) La matriz de cambio de base de B' a B es diagonal; C) En los conjuntos de matrices no se puede hacer ecuaciones de cambio de base; D) Ninguna de las anteriores.

¿Qué significa que las coordenadas de M en base B' son (1, 0, –1)*?.*

$$M = 1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}.$$

¿Qué coordenadas tiene M en base B?.

$$M=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+2\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}.$$

Las coordenadas de M en base B son (1, 0, 2).

$\Rightarrow$ La opción A es falsa.

¿Qué coordenadas tienen los elementos de B' en base B?.

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}=1\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+1\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&-1\end{pmatrix}=0\begin{pmatrix}1&0&0\\0&0&0\\0&0&0\end{pmatrix}+0\begin{pmatrix}0&0&0\\0&1&0\\0&0&0\end{pmatrix}-1\begin{pmatrix}0&0&0\\0&0&0\\0&0&1\end{pmatrix}$$

¿Matriz del cambio de la base B' a la base B?.

$$(S,B') \longrightarrow (S,B)$$
$$(1,0,0) \longrightarrow (1,0,1)$$
$$(0,1,0) \longrightarrow (1,1,0)$$
$$(0,0,1) \longrightarrow (0,0,-1)$$

$$Q_{B'B} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \Rightarrow \text{La opción B es falsa.}$$

¿Ecuaciones del cambio de la base B' a la base B?.

Si $M_{B'} = (m_1', m_2', m_3')$ y $M_B = (m_1, m_2, m_3)$, las ecuaciones de cambio de base son:

$$\begin{pmatrix} m_1 \\ m_2 \\ m_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} m_1' \\ m_2' \\ m_3' \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ La opción C es falsa, D es verdadera.

15. Aplíquese la expresión obtenida en el ejercicio anterior para comprobar que el cambio de coordenadas realizado para la matriz M es correcto.

$$(m_1, m_2, m_3) = (1,0,2);\ (m_1', m_2', m_3') = (1,0,-1)$$

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

Ejercicios relativos a:

"Operaciones elementales en una matriz."

1. Si A es la matriz de una aplicación lineal $f:(\mathbb{R}^3, B) \to (\mathbb{R}^3, B)$, una matriz escalonada equivalente es: A) Una matriz de orden tres triangular superior donde ningún elemento de la diagonal puede ser cero; B) La matriz del cambio de base B' a base B; C) La matriz triangular superior donde algún elemento de la diagonal puede ser cero, asociada a f en otras bases de $\mathbb{R}^3$; D) Ninguna de las anteriores.

En teoría se ha estudiado que sólo es correcta la opción C.

2. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$, una matriz equivalente escalonada es:

A) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$, D) Ninguna de las anteriores.

Utilizaremos el algoritmo descrito en el texto:

Primera vuelta del ciclo:

Paso 1: Tomamos $a_{11} \neq 0$ como elemento elemento pivote. Para que el pivote sea 1, hacemos la sustitución $F_1 \to F_1$.

Paso 2: Para que queden ceros en la columna del pivote por debajo de él, hacemos las sustituciones: $F_2 \to F_2$ y $F_3 \to F_3 - F_1$.

Segunda vuelta del ciclo:

Paso 3: Volvemos comenzar el ciclo tomando como elemento para convertir en pivote $a_{22} = 2$. La transformación a aplicar es: $F_2 \to \frac{1}{2}F_2$.

Paso 4: Para que queden ceros en la columna del pivote por debajo de él, hacemos las sustituciones: $F_3 \to F_3 + 4F_2$.

Tercera vuelta del ciclo:

Paso 5: Volvemos comenzar el ciclo tomando como elemento para convertir en pivote $a_{33} = 12$. La transformación a aplicar es: $F_3 \to \frac{1}{12}F_3$.

Fin del ciclo.

$$\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{paso 2}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{paso 3}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & -4 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{paso 4}}$$

$$\xrightarrow{\text{paso 4}} \begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix} \xrightarrow{\text{paso 5}} \begin{pmatrix} \boxed{1} & 3 & -2 \\ 0 & \boxed{1} & 5/2 \\ 0 & 0 & \boxed{1} \end{pmatrix}$$

❖ Hemos llegado a una matriz escalonada en sentido estricto: Los pivotes son 1.

❖ Si sólo se exige que los pivotes sean $\neq 0$, la matriz es escalonada en sentido amplio. Este criterio es suficiente para la mayoría de los propósitos.

⇒ Son correctas las opciones A, B y C si se pide la matriz escalonada en sentido amplio, si se pide en sentido estricto sólo es correcta la B.

3. En el ejercicio anterior hemos pasado de $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 2 & 5 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix}$ a $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ mediante sucesivas transformaciones elementales. La matriz elemental asociada al paso 4 es: A) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 12 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & -2 \\ 0 & 1 & 5/2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Las operaciones elementales (en el ejercicio anterior han realizadas con filas) son:

Permutación, o intercambio entre filas.
Sustitución de una fila por su suma con una combinación lineal de otras.
Multiplicación de una fila por un escalar.

❖ Cada una de ellas lleva asociada una matriz elemental.

Operación elemental	Matriz elemental asociada
$F_1 \to F_1$	$E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$F_3 \to F_3 - F_1$	$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$F_2 \to \frac{1}{2} F_2$	$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1/2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$
$F_3 \to F_3 + 4F_2$	$E_4 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \end{pmatrix}$
$F_3 \to \frac{1}{12} F_3$	$E_5 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1/12 \end{pmatrix}$

⇒ Es correcta la opción A.

4. Si A es la matriz asociada a la aplicación lineal $f:(\mathbb{R}^3, B) \to (\mathbb{R}^3, B)$, es cierto que: A) Se puede obtener cualquier matriz escalonada multiplicando A por matrices elementales; B) Hay una base B', tal que, la matriz A' asociada a $f:(\mathbb{R}^3, B') \to (\mathbb{R}^3, B')$ es escalonada; C) La matriz A' de la opción B es inversa de A; D) Ninguna de las anteriores.

Todas las respuestas a este ejercicio se desprenden del teorema siguiente:

❖ "Toda matriz se puede transformar en otra equivalente escalonada por filas mediante transformaciones elementales".

⇒ La opción A es falsa, sólo se pueden obtener matrices equivalentes a la dada.

⇒ La opción B es cierta, las matrices asociadas a una aplicación lineal, f, en bases diferentes son equivalentes.

⇒ La opción C es falsa en general.

5. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$ es la matriz asociada a $f:(\mathbb{R}^2, B) \to (\mathbb{R}^2, B)$ siendo B la base canónica, y, A' es una matriz escalonada equivalente, es cierto que: A) $A' = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix}$; B) Se puede encontrar A' con dos operaciones elementales; C) Las matrices elementales asociadas a las operaciones anteriores son $E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ y $E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$; D) $A' = E_2 E_1 A$.

¿Matriz escalonada equivalente a A?.

Si no decimos lo contrario tomaremos las matrices escalonadas en sentido amplio.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix} \underline{1} & 2 \\ 0 & -3 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ La opción A es verdadera.

¿Paso de A a A'?.

Se realiza mediante las operaciones elementales $F_1 \leftrightarrow F_2$ y $F_2 \to F_2 - 2F_1$
$\Rightarrow$ La opción B es verdadera.

¿Matrices elementales asociadas a las operaciones elementales realizadas?.

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix} \qquad \begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \begin{pmatrix}1 & 0\\ -2 & 1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ La opción C es verdadera.

$\Rightarrow$ La opción D es verdadera.

6. En las condiciones del ejercicio anterior, para que A' sea la matriz asociada a $f:(\mathbb{R}^2, B') \to (\mathbb{R}^2, B')$, los vectores de la base $B' = \{(x_1, x_2), (y_1, y_2)\}$ deben verificar: A) $x_1 = x_2 = 2y_1 = y_2$; B) $x_1 = -x_2 = 2y_1 = -2y_2$; C) $x_1 = -x_2 = 2y_1 = 2y_2$; D) Ninguna de las anteriores.

Las matrices asociadas a las aplicaciones que intervienen en este ejercicio son:

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^2, B) & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^2, B)\\ \uparrow Q_{B'B} & & \uparrow Q_{B'B}\\ (\mathbb{R}^2, B') & \xrightarrow{A'} & (\mathbb{R}^2, B')\end{array}$$

¿Matriz $Q_{B'B}$ de cambio de la base B' a la base B?.

$$Q_{B'B} = \begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}$$

Observemos que:

$$\begin{array}{ccc}(\mathbb{R}^2, B) & \xrightarrow{A} & (\mathbb{R}^2, B)\\ \uparrow Q_{B'B} & & \\ (\mathbb{R}^2, B') & & \end{array} \quad \text{tiene el mismo efecto que} \quad \begin{array}{ccc} & & (\mathbb{R}^2, B)\\ & & \uparrow Q_{B'B}\\ (\mathbb{R}^2, B') & \xrightarrow{A'} & (\mathbb{R}^2, B')\end{array}$$

Se debe verificar $A\,Q_{B'B} = Q_{B'B}\,A'$

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x_1 & y_1\\ x_2 & y_2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & -3\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_1+x_2=x_1\\ x_1+2x_2=x_2\\ 2y_1+y_2=2x_1-3y_1\\ y_1+2y_2=2x_2-3y_2\end{cases}$$

De las ecuaciones $\begin{cases}2x_1+x_2=x_1\\ x_1+2x_2=x_2\end{cases}\Rightarrow x_1=-x_2$. Como $\begin{cases}2y_1+y_2=2x_1-3y_1\\ y_1+2y_2=2x_2-3y_2\end{cases}$,

sustituyendo $x_1=-x_2$ en $\begin{cases}2y_1+y_2=2x_1-3y_1\\ y_1+5y_2=2x_2\end{cases}$ se obtiene $\begin{cases}5y_1+y_2=2x_1\\ y_1+5y_2=-2x_1\end{cases}$

$$\Rightarrow\begin{cases}y_1=\dfrac{1}{2}x_1\\ y_2=-\dfrac{1}{2}x_1\end{cases}\Rightarrow \text{Sólo es correcta la opción B.}$$

7. El sistema de vectores {(1, 0, 0, 0), (0, 1, 0, 0), (0, 1, 1, –1) (0, 0, 1, –1)} de $\mathbb{R}^4$ tiene rango: A) Calculable escalonando la matriz que forman sus filas; B) Dos; C) El número de filas de su matriz escalonada; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Hasta aquí hemos utilizado la definición de independencia lineal para ver si un conjunto de vectores es linealmente independiente, o no, pero también podemos utilizar el teorema siguiente:

❖ El número de vectores fila de una matriz A que son linealmente independientes coincide con el de columnas linealmente independientes, y, es igual al número de filas no nulas de su matriz escalonada.

Ya se puede afirmar que la opción C no es cierta, para que lo fuera haría falta que se tomara el número de filas *no nulas* de su matriz escalonada.

¿Rango de las matrices que forma el sistema de vectores?.

Podemos considerarlos como vectores fila ⇒ Forman la matriz

$A=\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -1 \end{pmatrix}$, para que A sea una matriz escalonada es suficiente hacer los cambios: $\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \to F_3 - F_2 - F_4} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4}$

$\xrightarrow{F_3 \leftrightarrow F_4} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 0 & 0 \\ 0 & \underline{1} & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \underline{1} & -1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, el resultado es una matriz con tres escalones cuyo primer elemento es no nulo ⇒ El rango del sistema de vectores es tres ⇒ Es cierta la opción A.

8. El rango del sistema de vectores {(0, 2, 2, 1), (1, 0, 1, 0), (1, 4, 5, 2), (2, 6, 8, 3)} de $\mathbb{R}^4$ es: A) Tres; B) Dos; C) Cuatro; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Para calcular rangos e suficiente con el escalonamiento en sentido amplio.

¿Qué matriz forman los vectores fila?.

$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix}$.

¿Matriz escalonada equivalente?.

$$\begin{pmatrix} 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 1 & 4 & 5 & 2 \\ 2 & 6 & 8 & 3 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \to F_4 - 2F_3]{F_3 \to F_3 - F_1} \xrightarrow[F_4 \to F_4 - 2F_3]{F_3 \to F_3 - F_1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 2 & 2 & 1 \\ 0 & 4 & 4 & 2 \\ 0 & -2 & -2 & -1 \end{pmatrix} \xrightarrow[F_4 \to F_4 + F_2]{F_3 \to F_3 - 2F_2} \begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{2} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Rango de la matriz?.

La matriz escalonada tiene dos escalones ⇒ El rango de la matriz es dos.

⇒ Es cierta la opción B.

9. Fórmese una base de $\mathbb{R}^4$, tal que, contenga el máximo posible de vectores del sistema anterior.

La matriz escalonada equivalente es $\begin{pmatrix} \underline{1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{2} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, su rango es dos ⇒ En cualquier base de $\mathbb{R}^4$ pueden aparecer como máximo dos vectores linealmente independientes del conjunto dado.

Los dos escalones que aparecen corresponden a (1, 0, 1, 0) y (0, 2, 2, 1), que tomaremos para formar la base de $\mathbb{R}^4$.

$\begin{pmatrix} \underline{|1} & 0 & 1 & 0 \\ 0 & \underline{|2} & 2 & 1 \\ 0 & 0 & \underline{|1} & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \underline{|1} \end{pmatrix}$ es una matriz con cuatro vectores linealmente independientes, es decir, una base de $\mathbb{R}^4$ es $B = \{(1,0,1,0), (0,2,2,1), (0,0,1.0), (0,0,0,1)\}$.

10. La matriz inversa de $A = \begin{pmatrix} 2 & 9 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$ es: A) Un producto de matrices elementales; B) A por un producto de matrices elementales; C) Un producto de matrices elementales por A; D) Ninguna de las anteriores.

❖ La técnica del escalonamiento se puede utilizar para calcular matrices inversas.

¿Se puede hallar así A^{-1}?.

$$(A|I) = \left(\begin{array}{cc|cc} 2 & 9 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 2 & 9 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 - 2F_1} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 4 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - 4F_2}$$

$$\xrightarrow{F_1 \to F_1 - 4F_2} \left(\begin{array}{cc|cc} 1 & 0 & -4 & 9 \\ 0 & 1 & 1 & -2 \end{array}\right) = (I|A^{-1}) \Rightarrow A^{-1} = \begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

¿Matrices elementales asociadas a las operaciones elementales?.

Operación elemental	Matriz elemental asociada
$F_1 \leftrightarrow F_2$	$E_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$
$F_2 \to F_2 - 2F_1$	$E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$
$F_1 \to F_1 - 4F_2$	$E_3 = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Se verifica $E_3\,E_2\,E_1\,A = I \Rightarrow A^{-1} = E_3\,E_2\,E_1$.

$$\begin{pmatrix} -4 & 9 \\ 1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ Es correcta la opción A.

11. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$, se verifica que A^{-1} es: A) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 4 \\ 3 & 2 & 5 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$;

B) $\begin{pmatrix} -7 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 5 \\ -3 & 0 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \leftrightarrow F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 2 & 1 & 4 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}F_1}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 3 & 2 & 5 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - 3F_1} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1/2 & -1 & -3/2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to -F_2}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1/2 & -1 & -3/2 & 1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to F_3 - \frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3/2 & 1 & 1/2 \end{array}\right) \xrightarrow{F_3 \to -2F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_2 \to F_2 + F_3} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 2 & 1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - 2F_3}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 1/2 & 0 & 11/2 & 4 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right) \xrightarrow{F_1 \to F_1 - \frac{1}{2}F_2} \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -7 & 5 & 3 \\ 0 & 1 & 0 & 3 & -2 & -2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & -2 & -1 \end{array}\right).$$

$\Rightarrow$ Es correcta la opción B: $A^{-1} = \begin{pmatrix} -7 & 5 & 3 \\ 3 & -2 & -2 \\ 3 & -2 & -1 \end{pmatrix}$.

CAPÍTULO 3

DETERMINANTE DE UNA MATRIZ CUADRADA

Ejercicios relativos a:

"Determinante de una matriz cuadrada."

1. $\sigma = (2, 3, 4, 1)$ es una permutación de $S = \{1, 2, 3, 4\}$ que verifica: A) Es par; B) Es impar; C) Tiene 3 inversiones; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Una permutación se llama par si tiene un número par de inversiones, e impar si tiene un número impar de inversiones. A las permutaciones pares se les asigna el signo +, y a las permutaciones impares se les asigna el signo –.

Para pasar de $\sigma = (2, 3, 4, 1)$ a la permutación principal (1, 2, 3, 4) hay que hacer, por ejemplo, las siguientes inversiones

$$2\ \ 3\ \ 4\ \ 1 \underset{①}{\rightarrow} 2\ \ 3\ \ 1\ \ 4 \underset{②}{\rightarrow} 2\ \ 1\ \ 3\ \ 4 \underset{③}{\rightarrow} 1\ \ 2\ \ 3\ \ 4$$

①: es la inversión de 4 1 por 1 4
②: es la inversión de 3 1 por 1 3
③: es la inversión de 2 1 por 1 2

Luego hay 3 inversiones y es una permutación impar. B y C son las opciones correctas.

2. Si $a_{i1}a_{2j}a_{4l}a_{3k}a_{m5}$ es un término del desarrollo del determinante de una matriz A, ¿de qué orden es la matriz A?: A) 5; B) m; C) No se puede determinar: D) Ninguna de las anteriores.

❖ El determinante de una matriz de orden n es: $|A| = \sum_{S_n} (signo\ \sigma) a_{1\sigma(1)} a_{2\sigma(2)} \cdots a_{n\sigma(n)}$, siendo S_n el conjunto de todas las permutaciones de $S = \{1, 2, ..., n\}$.

Si $a_{i1}a_{2j}a_{3k}a_{4l}a_{m5}$ es un término del desarrollo del determinante de una matriz A, entonces A es de orden 5 $\Rightarrow$ Sólo A es correcta.

3. Si $a_{15}a_{2i}a_{3j}a_{42}a_{53}$ es un término del desarrollo de un determinante de orden 5, debe llevar signo negativo cuando (i, j) sea: A) (1,4); B) (4,1); C) Siempre lleva signo negativo; D) Ninguna de las anteriores.

Como sabemos que en $a_{15}a_{2i}a_{3j}a_{42}a_{53}$ hay elementos de las columnas segunda, tercera y quinta, la permutación es de la forma:

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & i & j & 2 & 3 \end{Bmatrix}.$$

Las únicas posibilidades para (i, j) son:

$(1,4) \Rightarrow \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 1 & 4 & 2 & 3 \end{Bmatrix}$ que tiene 6 inversiones y lleva signo +.

$(4,1) \Rightarrow \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 5 & 4 & 1 & 2 & 3 \end{Bmatrix}$ que tiene 7 inversiones y lleva signo –.

$\Rightarrow$ Es correcta la opción B.

4. Si $a_{1i}a_{3j}a_{kl}a_{l4}a_{5k}$ es un término del desarrollo de una matriz A, el número de posibilidades distintas para (i, j, k) es: A) 5; B) 6; C) No se puede determinar; D) Ninguna de las anteriores.

Para saber cuántas posibilidades distintas hay para (i, j, k) es necesario calcular todas las permutaciones posibles para ese término $a_{13}a_{2i}a_{3j}a_{44}a_{5k}$.

❖ En el determinante de una matriz de orden n aparecen todas las permutaciones de $S = \{1, 2, ..., n\}$.

Las permutaciones buscadas son de la forma

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & i & j & 4 & k \end{Bmatrix}.$$

Entonces (i, j, k) pueden ser todas las posibles permutaciones de $\{2, 3, 5\}$:

$$(2,3,5),\ (3,2,5),\ (5,3,2),\ (2,5,3),\ (5,2,3),\ (3,5,2)$$

su número es $3! = 3.2.1 = 6$.

⇒ La única respuesta correcta es B.

5. Sea $A = (a_{ij})$ una matriz. Si $\text{sig}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}$ es un término del determinante de la matriz A, entonces: A) No puede ocurrir que $\sigma(i) = i$ para todo $i = 1, ..., n$; B) El determinante de A tiene $n\,(n-1)\,...\,1$ sumandos; C) No se puede determinar el orden de la matriz A.

La opción A es falsa. Recordando la definición de determinante:

❖ Si $\text{sig}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\ldots a_{n\sigma(n)}$ es un término del determinante de la matriz A, el orden de la matriz es n.

⇒ C es falso.

❖ Hay tantos sumandos en el determinante como permutaciones de n elementos.

Hay $n! = n\,(n-1)\,...\,1$ elementos, que es la opción B ⇒ B es cierta.

Como la permutación $\sigma(i) = i$ para todo $i = 1, ..., n$ es la identidad, el término $a_{11}a_{22}...a_{nn}$ siempre está en el determinante y por tanto A es falsa.

6. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, las permutaciones que hacen nulo el término asociado al desarrollo de $|A|$ son: A) $\sigma = (1, 2, 3)$; B) $\sigma = (1, 3, 2)$; C) $\sigma = (2, 3, 4, 1)$; D) $\sigma = (2, 3, 1)$; E) $\sigma = (3, 2, 1)$.

❖ Un producto es nulo si lo es alguno de sus factores.

En esta matriz son nulos los coeficientes a_{23} y a_{32}. Las permutaciones en que intervienen a_{23} y a_{32} son de la forma:

$$\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & 3 & j \end{Bmatrix} \text{ y } \begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & 2 \end{Bmatrix}$$

Las permutaciones del tipo $\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & 3 & j \end{Bmatrix}$ son $\sigma = (1,3,2)$ y $\sigma = (2,3,1)$.

Las permutaciones del tipo $\begin{Bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ i & j & 2 \end{Bmatrix}$ son $\sigma = (1,3,2)$ y $\sigma = (3,1,2)$.

$\Rightarrow$ Son ciertas B y D.

7. En el desarrollo del determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ no pueden aparecer las permutaciones: A) $\sigma = (2, 3, 4)$; B) $\sigma = (2, 3, 4, 1)$; C) $\sigma = (2, 3, 1)$; D) $\sigma = (1, 2, 3, 1)$.

❖ Como la matriz es de orden 3, las permutaciones que aparecen en el desarrollo de su determinante son del conjunto $S = \{1, 2, 3\}$.

⇒ Las opciones B y D son falsas por tener 4 elementos

$\sigma = (2, 3, 4)$ no es permutación por aparecer el elemento 4, que correspondería a una fila 4 inexistente, y faltar el 1.

⇒ Sólo es válida la opción C

8. De entre las siguientes permutaciones son pares: A) $\sigma = (1, 2)$; B) $\sigma = (1, 3, 2, 4)$; C) $\sigma = (3, 4, 1, 2)$; D) $\sigma = (1, 3, 6, 5, 4, 2)$.

¿Cuántas inversiones tiene $\sigma = (1, 2)$*?.*

$\sigma = (1, 2)$ es la permutación principal del conjunto $S = \{1, 2\}$ ⇒ Tiene 0 inversiones y es par ⇒ A es cierta.

¿Cuántas inversiones tiene $\sigma = (1, 3, 2, 4)$*?.*

Para transformar la permutación $\sigma = (1, 3, 2, 4)$ en la principal $(1, 2, 3, 4)$ basta hacer la inversión 3 2 por 2 3, por lo tanto es impar ⇒ B es falsa.

¿Cuántas inversiones tiene $\sigma = (3, 4, 1, 2)$*?.*

Para $\sigma = (3, 4, 1, 2)$ se tiene:

$$\sigma = (3, 4, 1, 2) \rightarrow (3, 2, 1, 4) \rightarrow (1, 2, 3, 4).$$

Tiene 2 inversiones ⇒ es una permutación par ⇒ C es cierta.

¿Cuántas inversiones tiene $\sigma = (1, 3, 6, 5, 4, 2)$*?.*

La permutación $\sigma = (1, 3, 6, 5, 4, 2)$ de $S = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ se convierte en la principal haciendo las inversiones:

$$\sigma = (1, 3, 6, 5, 4, 2) \rightarrow (1, 2, 6, 5, 4, 3) \rightarrow (1, 2, 3, 5, 4, 6) \rightarrow (1, 2, 3, 4, 5, 6).$$

Tiene 3 inversiones ⇒ es impar ⇒ D es falsa.

9. Dada la matriz $\begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 2 & -1 \\ 0 & 0 & -3 \end{pmatrix}$, su determinante es: A) –6; B) 1; C) El mismo que el de su matriz traspuesta; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Sabemos que el determinante de una matriz triangular es el producto de los elementos de la diagonal principal.

En este caso el producto es $-6 \Rightarrow$ A es una respuesta correcta y B es falsa.

El determinante de una matriz siempre es igual al de su traspuesta. En este caso es muy fácil comprobarlo. Su matriz traspuesta es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 \\ 0 & -1 & -3 \end{pmatrix}$, que también es una matriz triangular (inferior), y tiene la misma diagonal. Luego su determinante también es $-6 \Rightarrow$ C es correcta.

10. Sea el endomorfismo $f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ definido por $f(x_1, x_2) = (x_1 + 2x_2, -x_1)$ en la base canónica. Entonces, el determinante de f: A) No existe porque los endomorfismos no tienen determinante; B) Es $\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$; C) Es 2; D) Ninguna de las anteriores.

❖ El determinante del endomorfismo f es el determinante de la matriz asociada al mismo.

La matriz asociada a f es $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ y, como este determinante vale 2, son correctas las respuestas B y C.

11. El determinante de conjunto de vectores de $\mathbb{R}^4$, $S = \{(2, 0, 0, 0), (-1, 1, 0, 0), (0, 1, -2, 0), (-3, -4, 1, 1)\}$ es: A) –4; B) No existe el determinante de un conjunto de vectores; C) Coincide con $\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ El determinante de un conjunto de vectores es el determinante de la matriz A, cuyas columnas (o filas) están formadas por las coordenadas de cada vector.

En este caso, $A = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & -4 \\ 0 & 0 & -2 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ y como esta matriz es una matriz triangular, su determinante es el producto de los elementos de la diagonal, que es –4. La respuesta A es correcta. Para ver si C es correcta o no, hay que calcular el determinante, que es 2 ⇒ B es falsa.

❖ Si hubiéramos tomado los vectores como filas, habríamos obtenido la matriz traspuesta, cuyo determinante es el mismo.

12. Si $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$, I es la matriz identidad de orden 2 y 0 la matriz nula de orden 2, existen valores de a, b, c y d para los que se verifica: A) $A^2 - (a+d)A + \det I = 0$; B) $A^2 - (a+d)A = 0$; C) $A^2 - (a+d)A + I = 0$; D) Ninguna de las anteriores.

La respuesta A no tiene sentido, porque sumamos la matriz $A^2 - (a+d)A$ con un número, det I, y esta operación no está definida.

Veamos si son correctas B o C.

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}^2 - (a+d)\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a^2+bc & b(a+d) \\ c(a+d) & cb+d^2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} a^2+ad & b(a+d) \\ c(a+d) & ad+d^2 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} bc-ad & 0 \\ 0 & bc-ad \end{pmatrix} = (bc-ad)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = -\det(A)I.$$

Si $\det(A) = 0$, entonces es cierta la opción B. Si $\det(A) = 1$, entonces es cierta la opción C $\Rightarrow$ B y C son correctas.

Ejercicios relativos a:

"Cálculo de determinantes

1. Si $A=\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$, entonces un menor suyo es: A) –6; B) –1; C) 4; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Un menor de una matriz A es el determinante de cualquier submatriz cuadrada suya.

Los menores pueden ser los elementos de la matriz A (que corresponden a los determinantes de las submatrices cuadradas de orden 1) o el determinante de A. Entonces la respuesta B es correcta porque –1 es el elemento a_{21} de A.

Como $|A| = -6$ (A es una matriz triangular inferior), es correcta la respuesta A.

2. Dada la matriz $A = (1 \quad -1 \quad 0 \quad 3 \quad -2 \quad 4 \quad -15)$, entonces: A) 2 es un menor de A; B) 1 es un menor de A; C) A no tiene menores; D) Ninguna de las anteriores.

A es una matriz fila. En este caso, las únicas submatrices cuadradas son los elementos cuyos determinantes son el propio elemento ⇒ C es falsa.

Como 2 no es un elemento de la matriz, A también es falsa, B es correcta.

3. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, entonces: A) El adjunto del elemento a_{12} es 4; B) El adjunto del elemento a_{12} es –4; C) El menor complementario del elemento a_{12} es 4; D) El menor complementario del elemento a_{12} es –4.

❖ El menor complementario de un elemento de una matriz es el determinante de la submatriz que resulta de eliminar la fila y columna a la que pertenece.

Para el elemento a_{12}, se considera la submatriz de A que resulta de eliminar la primera fila (indicada por el primer subíndice) y la segunda columna (el segundo subíndice). Es decir, es el determinante de la submatriz $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$. Este determinante vale $-4 \Rightarrow$ D es correcta y C es falsa.

❖ El adjunto de un elemento de una matriz es su menor complementario afectado del signo correspondiente a dicho elemento.

En este caso, hay que multiplicar el menor complementario de a_{12} por $(-1)^{1+2}$. Luego el adjunto vale $4 \Rightarrow$ Es correcta la respuesta A.

4. Si consideramos $A = \begin{pmatrix} 3 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 2 \\ -1 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y su submatriz $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}$, entonces: A) El adjunto de B es 1; B) B no tiene adjunto; C) El menor complementario de B es 1; D) Ninguna de las anteriores.

¿Qué filas y columnas determinan B?.

B está formada por las filas 1 y 3, y las columnas 2 y 3.

¿Menor complementario de B?.

❖ El menor complementario de una submatriz cuadrada B es el determinante de la submatriz cuadrada de A que resulta de eliminar las filas y las columnas a las que pertenece B.

El menor complementario de B es el determinante de $a_{21} = |1| = 1 \Rightarrow$ C es correcta.

¿Adjunto de B?.

❖ El adjunto de una submatriz cuadrada B es el menor complementario con el signo correspondiente. El signo se determina multiplicando el menor por $(-1)^{\Sigma i+\Sigma j}$, donde Σi es la suma de los subíndices de las filas y Σj es la suma de los subíndices de las columnas.

En nuestro caso es $(-1)^{(1+3)+(2+3)} = (-1)^9 = -1$ y por tanto el adjunto es -1 $\Rightarrow$ A y B son falsas.

5. Si calculamos el determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 4 & 5 & 1 & 1 \\ 0 & 2 & 3 & 1 \\ 1 & 4 & 2 & 5 \\ 1 & 6 & 2 & 8 \end{pmatrix}$ mediante la Regla de Laplace tomando la primera y tercera filas, aparecen: A) Seis menores; B) Seis adjuntos; C) Tres menores; D) Tres adjuntos.

❖ **Regla de Laplace:** El determinante de una matriz cuadrada de orden n es igual a la suma de todos los productos posibles de los menores de orden p, (con $p < n$) que se pueden formar con p filas (o columnas), por sus adjuntos correspondientes.

Los menores de orden 2 de la primera y tercera fila son:

$$\Delta_1 = \begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 4 \end{vmatrix} = 11;\ \Delta_2 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} = 7;\ \Delta_3 = \begin{vmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 5 \end{vmatrix} = 19$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 6;\ \Delta_5 = \begin{vmatrix} 5 & 1 \\ 4 & 5 \end{vmatrix} = 21;\ \Delta_6 = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 3.$$

Y sus adjuntos:

$$A_1 = \begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 8 \end{vmatrix} (-1)^{(1+3)+(1+2)} = -22;\ A_2 = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 6 & 8 \end{vmatrix} (-1)^{(1+3)+(1+3)} = 10;$$

$$A_3 = \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 2 \end{vmatrix} (-1)^{(1+3)+(1+4)} = 14;\ A_4 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 8 \end{vmatrix} (-1)^{(1+3)+(2+3)} = 1;$$

$$A_5 = \begin{vmatrix} 0 & 3 \\ 1 & 2 \end{vmatrix} (-1)^{(1+3)+(2+4)} = -3;\ A_6 = \begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} (-1)^{(1+3)+(3+4)} = 2.$$

De esta forma, el determinante es

$$|A| = \sum_{i=1}^{6} A_i \Delta_i = (-22)\cdot 11 + 10\cdot 7 + 14\cdot 19 + 1\cdot 6 + (-3)\cdot 21 + 2\cdot 3 = 43.$$

$\Rightarrow$ A y B son ciertas.

6. El número de menores de orden 2 de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 7 & 1 & 8 \end{pmatrix}$ es:

A) Cinco; B) Seis ; C) Ocho; D) Nueve; E) Ninguna de las anteriores.

Calcularemos todos los menores de orden 2 de la matriz anterior siguiendo un orden para que no falte ninguno.

Con la primera columna, y, primera y segunda fila fijas: $\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \end{vmatrix}$.

Con la segunda columna, y, primera y segunda fila fijas: $\begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 4 \end{vmatrix}$.

Con la primera columna, y, segunda y tercera fila fijas: $\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 4 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}$.

Con la segunda columna, y, segunda y tercera fila fijas: $\begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$.

Con la primera y tercera fila fijas: $\begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 7 & 8 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 7 & 1 \end{vmatrix}, \begin{vmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 8 \end{vmatrix}$.

La respuesta es nueve $\Rightarrow$ D es correcta.

❖ Observemos que no hemos incorporado los que salen repetidos.

7. El determinante de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$ es: A) 1; B) 0; C) -1;

D) Ninguna de las anteriores.

❖ El determinante de una matriz cuadrada de orden n es igual a la suma de los productos de los elementos de una fila por sus adjuntos correspondientes.

Para calcular el determinante de la matriz anterior, si se desarrolla por la segunda fila, resulta:

$$|A| = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}0\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+2}1\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & -1 \end{vmatrix} + (-1)^{2+3}0\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} =$$

$$= 1\big(1(-1) - (-1)(-1)\big) = -1 - 1 = -2.$$

$\Rightarrow$ No son ciertas ni A, ni B, ni C y la única respuesta correcta es D.

8. Dada la ecuación $\begin{vmatrix} x & 2 & x \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = -4$, su solución es: A) $x = 1$; B) $x = \pm 1$;

C) No real; D) La expresión anterior no es una ecuación.

Esta ecuación se puede resolver, sin más que calcular el determinante; desarrollando por la tercera fila resulta:

$$\begin{vmatrix} x & 2 & x \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & x \end{vmatrix} = -4 \Rightarrow (-1)^{3+3} x \begin{vmatrix} x & 2 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = x(x-2) = -4 \Rightarrow x^2 - 2x + 4 = 0.$$

$\Rightarrow$ D no es correcta.

Las soluciones de esta ecuación son:

$$x = \frac{2 \pm \sqrt{(-2)^2 - 4 \cdot 4}}{2} = \frac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}, \text{ que no existen en } \mathbb{R}.$$

$\Rightarrow$ A y B también son falsas y es correcta la opción C.

9. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, es cierto que: A) $a = 3$ es solución de $|A - aI| = 0$; B) $a = 1$ es solución de $|A - aI| = 0$; C) $a = -1$ es solución de $|A - aI| = 0$; D) Ninguna de las anteriores.

$$|A - aI| = \left| \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 \end{pmatrix} - a \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \right| = \begin{vmatrix} 1-a & 2 & -1 \\ 0 & 1-a & 0 \\ -1 & 0 & -1-a \end{vmatrix} = 0.$$

Si se desarrolla por la primera columna resulta

$$|A - aI| = (1-a) \begin{vmatrix} 1-a & 0 \\ 0 & -1-a \end{vmatrix} + (-1) \begin{vmatrix} 2 & -1 \\ 1-a & 0 \end{vmatrix} = -(1-a)^2(1+a) - (1-a) = 0.$$

Si se saca factor común $(1-a)$, se obtiene la expresión equivalente

$$(1-a)\left(-(1-a)(1+a)-1\right)=0$$
$$\Leftrightarrow (1-a)(a^2-2)=0 \Rightarrow a=1 \text{ ó } a=\pm\sqrt{2}\,.$$

$\Rightarrow$ La respuesta B es correcta y el resto son falsas.

10. El determinante de la matriz $C = A + AB + AB^2 + \ldots + AB^{n-1}$, siendo $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}$ es: A) $\begin{pmatrix}\frac{1-2^{n-1}2}{-2}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}\frac{1-3^{n-1}3}{1-3}\end{pmatrix}$; B) $(2^{n-1}-1)(3^{n-1}-1)$; C) No se puede calcular sin más datos; D) Ninguna de las anteriores.

¿Cómo son la potencias de B?.

❖ Recordemos que el producto de dos matrices diagonales es otra matriz diagonal.

En nuestro caso las potencias de B tienen la forma:

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}^2=\begin{pmatrix}2^2 & 0\\ 0 & 3^2\end{pmatrix};\ \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}^3=\begin{pmatrix}2^3 & 0\\ 0 & 3^3\end{pmatrix};\ \ldots\ldots;\ \begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}^n=\begin{pmatrix}2^n & 0\\ 0 & 3^n\end{pmatrix}.$$

Si sustituimos los valores obtenidos en la expresión dada, se obtiene:

$$C=A+AB+AB^2+\ldots+AB^{n-1}=A\left(I+B+B^2+\ldots+B^{n-1}\right)=$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}2^2 & 0\\ 0 & 3^2\end{pmatrix}+\ldots+\begin{pmatrix}2^{n-1} & 0\\ 0 & 3^{n-1}\end{pmatrix}\right)=$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1+2+2^2+\ldots+2^{n-1} & 0\\ 0 & 1+3+3^2+\ldots+3^{n-1}\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2^n-1 & 0\\ 0 & \frac{3^n-1}{2}\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2^n-1 & 0\\ 0 & 3^n-1\end{pmatrix}.$$

❖ La suma de $1+2+2^2+...+2^{n-1}$ es la suma de n términos de una progresión geométrica de razón $r=2$, primer término $a_1=1$, que viene dada por la expresión $S_n=\dfrac{r^n a_1-a_1}{r-1}$.

Lo mismo se hace para la otra suma.

$\Rightarrow$ La única respuesta correcta es D porque $\begin{vmatrix} 2^n-1 & 0 \\ 0 & 3^n-1 \end{vmatrix}=(2^n-1)(3^n-1)$.

11. El determinante de la matriz que tiene por filas: (x, a, b, c), $(a, x, 0, 0)$, $(b, 0, x, 0)$, $(c, 0, 0, x)$ es: A) $a^2x^2+b^2x^2+c^2x^2$; B) $x^4-a^2x^2-b^2x^2-c^2x^2$; C) $x^2(a+b+c)^2$; D) Ninguna de las anteriores.

$$\begin{vmatrix} x & a & b & c \\ a & x & 0 & 0 \\ b & 0 & x & 0 \\ c & 0 & 0 & x \end{vmatrix} \overset{①}{=} b\begin{vmatrix} a & x & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & x \end{vmatrix}+x\begin{vmatrix} x & a & c \\ a & x & 0 \\ c & 0 & x \end{vmatrix} \overset{②}{=} bx\begin{vmatrix} a & x \\ b & 0 \end{vmatrix}+x\left(c\begin{vmatrix} a & x \\ c & 0 \end{vmatrix}+x\begin{vmatrix} x & a \\ a & x \end{vmatrix}\right)=$$

$$=-x^2b^2+x^4-x^2a^2-x^2c^2=x^4-x^2(a^2+b^2+c^2).$$

En el paso ① hemos desarrollado el determinante por la tercera columna.

En el paso ② se desarrolla $\begin{vmatrix} a & x & 0 \\ b & 0 & 0 \\ c & 0 & x \end{vmatrix}$ por la tercera columna y $\begin{vmatrix} x & a & c \\ a & x & 0 \\ c & 0 & x \end{vmatrix}$ también.

$\Rightarrow$ Es correcta sólo la opción B.

Ejercicios relativos a:

"Propiedades de los determinantes y su cálculo a partir de ellas."

1. Siendo A, B matrices cuadradas del mismo orden, de entre las siguientes opciones, elíjanse las correctas: A) $|A + B| = |A| + |B|$; B) $|AB| = |A|\,|B|$; C) $|A^n| = |A|^n$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Si en una matriz se multiplican todos los elementos de una fila (columna) por un mismo escalar λ, el determinante de la matriz resultante queda multiplicado por λ.

A es falsa; esto se puede demostrar con un ejemplo. Si A es una matriz de orden 2 con determinante distinto de 0 y tomamos $B = -A$, entonces $B + A$ es la matriz 0 y su determinante es 0, sin embargo

$$|A| + |B| = |A| + |-A| = |A| + (-1)^2 |A| = 2|A|$$

puede ser distinto de 0 si lo es $|A|$.

Obsérvese que $|-A| = (-1)^2 |A|$ porque en A, que es cuadrada de orden 2, hemos multiplicado cada una de las dos filas por -1 para obtener $-A$.

❖ Recordemos que si A y B son dos matrices cuadradas de orden n, se verifica: $|AB| = |A|\,|B|$.

$\Rightarrow$ B es cierta.

$$|A^n| = |A \ldots^n \ldots A| = |A| \ldots^n \ldots |A| = |A|^n$$

C es consecuencia de la afirmación B, y también es cierta.

2. De entre las siguientes afirmaciones, elíjanse las correctas: A) $|A'| = |A|$; B) $|\lambda A| = \lambda |A|$ siendo A matriz cuadrada de orden n y $\lambda \neq 1$; C) $(AB)^{-1} = A^{-1} B^{-1}$; D) Ninguna de las anteriores.

La opción A es cierta, porque:

❖ El determinante de una matriz es igual al determinante de su traspuesta.

La opción B es falsa, porque $\lambda A = (\lambda a_{ij})$ y si en una matriz se multiplican todos los elementos de una fila (columna) por un mismo escalar λ, el determinante de la matriz resultante queda multiplicado por λ^n, siendo n el orden de A, $|\lambda A| = \lambda^n |A|$.

Ejemplo:

$$\text{Si } A = \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{pmatrix},\ \lambda A = \begin{pmatrix} \lambda & 3\lambda \\ 4\lambda & -\lambda \end{pmatrix} \text{ y } |A| = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 4 & -1 \end{vmatrix} = -13,$$

$$|\lambda A| = \begin{vmatrix} \lambda & 3\lambda \\ 4\lambda & -\lambda \end{vmatrix} = -13\lambda^2 = \lambda^2 |A|.$$

Si utilizamos las propiedades asociativa y la existencia de elemento neutro del producto de matrices, podemos escribir las siguientes cadenas de igualdades:

$$\left.\begin{aligned} (AB)(B^{-1}A^{-1}) &= A(BB^{-1})A^{-1} = (AI)A^{-1} = AA^{-1} = I \\ (B^{-1}A^{-1})(AB) &= B^{-1}(A^{-1}A)B = (B^{-1}I)B = B^{-1}B = I \end{aligned}\right\} \Rightarrow (AB)^{-1} = B^{-1}A^{-1}$$

$\Leftrightarrow$ La inversa de AB es $B^{-1}A^{-1}$.

Como el producto de matrices no es conmutativo (lo que en nuestro caso significa que $A^{-1}B^{-1} \neq B^{-1}A^{-1}$) $\Rightarrow$La afirmación C es falsa.

3. Elíjanse las opciones correctas: A) El determinante de una suma de matrices no siempre coincide con el determinante de la suma de las traspuestas de dichas matrices; B) $|(AB)'| = |A|\,|B|$; C) El determinante de la traspuesta de una

matriz es siempre distinto del determinante de la matriz; D) Ninguna de las anteriores.

La opción A expresada en lenguaje simbólico es: $|A+B| \neq |A'+B'|$; sabemos que $(A+B)' = A'+B'$ y que el determinante de una matriz cuadrada coincide con el de su transpuesta, $|A| = |A'|$. Debe ser $|(A+B)'| = |A+B| \Rightarrow$ A es falsa.

Como $(AB)' = B'A'$, calculando los determinantes y aplicando propiedades conocidas, tenemos $|(AB)'| = |B'A'| = |A'|\,|B'| = |A|\,|B| \Rightarrow$ B es cierta.

C es falsa, porque el determinante de una matriz y el de su traspuesta coinciden.

4. Si $A = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}$ y a, b, c son tres números reales positivos, con $a^2+b^2+c^2 = 1$, que es cierto que: A) $A^n = a^n A$; B) $A^n = b^n A$; C) $A^n = A$; D) Ninguna de las anteriores.

Para $n = 2$ se cumple que:

$$A^2 = \begin{pmatrix} a^2 & ab & ac \\ ab & b^2 & bc \\ ac & bc & c^2 \end{pmatrix}^2 = \begin{pmatrix} (a^2+b^2+c^2)a^2 & (a^2+b^2+c^2)ab & (a^2+b^2+c^2)ac \\ (a^2+b^2+c^2)ab & (a^2+b^2+c^2)b^2 & (a^2+b^2+c^2)bc \\ (a^2+b^2+c^2)ac & (a^2+b^2+c^2)bc & (a^2+b^2+c^2)c^2 \end{pmatrix} = A.$$

Para $n = 2$, la opción correcta es la C y las demás son falsas, pero eso no es suficiente para afirmar que C es cierta para cualquier valor de n. Utilizando el método de inducción:

Supongamos que es cierto para $n-1$, es decir $A^{n-1} = A$, y demostrémoslo para n:

$$A^n = A^{n-1}A = AA = A.$$

$\Rightarrow$ La opción C es correcta.

5. El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es distinto de 0 si:

A) $a = 0$; B) $a = -1$; C) $a = 1$; D) En todos los casos distintos de los anteriores.

Como es un determinante de orden 4, lo más sencillo es aplicar antes las propiedades de los determinantes para simplificar los cálculos.

❖ Si en una matriz A, se sustituye una fila (columna) por ella misma más el resultado de multiplicar otra fila (columna) distinta por el escalar λ, el determinante de la matriz resultante no varía.

Si hacemos el cambio $C_i \to C_i - C_4$ cuando $i \neq 4$, el determinante no varía y su cálculo es más sencillo:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 & 1 \\ 1 & a+1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & a+2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & a & 0 & 1 \\ 0 & 0 & a+1 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}.$$

Si se desarrolla el determinante por la última fila resulta:

$$|A| = (-1)^{4+4} 1 \begin{vmatrix} a-1 & 0 & 0 \\ 0 & a & 0 \\ 0 & 0 & a+1 \end{vmatrix} = (a-1)a(a+1) = a^3 - a,$$

que es distinto de 0 si $a^3 \neq a$, lo que ocurre si $a \neq 0, 1, -1 \Rightarrow$ Podemos afirmar que la única opción correcta es la **D**.

6. El determinante de la matriz cuyas filas son: $(1 + x, 1, 1, 1)$, $(1, 1 - x, 1, 1)$, $(1, 1, 1 + z, 1)$ y $(1, 1, 1, 1 - z)$ es: A) 0; B) $x^2 z^2$; C) xz; D) Ninguna de las anteriores.

Escribimos el determinante y denotamos F_i a la fila i-ésima y C_i a la columna i-ésima. Aplicamos las propiedades de los determinantes

❖ Si en una matriz A, se sustituye una fila (columna) por ella misma más el resultado de multiplicar otra fila (columna) distinta por el escalar λ, el determinante de la matriz resultante no varía.

❖ Si en una matriz se multiplican todos los elementos de una fila (columna) por un mismo escalar λ, el determinante de la matriz resultante queda multiplicado por λ.

$$|A|=\begin{vmatrix} 1+x & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1-x & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+z & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix} \xrightarrow[F_i\to F_i-F_4]{=} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & z \\ 0 & -x & 0 & z \\ 0 & 0 & z & z \\ 1 & 1 & 1 & 1-z \end{vmatrix}$$

$$\xrightarrow[C_4\to C_4-C_3]{=} \begin{vmatrix} x & 0 & 0 & z \\ 0 & -x & 0 & z \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -z \end{vmatrix}.$$

Si sacamos factor común en C_4 y aplicamos la segunda propiedad, resulta:

$$|A|=z\begin{vmatrix} x & 0 & 0 & 1 \\ 0 & -x & 0 & 1 \\ 0 & 0 & z & 0 \\ 1 & 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=z^2\begin{vmatrix} x & 0 & 1 \\ 0 & -x & 1 \\ 1 & 1 & -1 \end{vmatrix}=z^2x^2.$$

donde hemos desarrollado por la tercera fila. Comparando el resultado obtenido con las opciones dadas, vemos que la única respuesta correcta es la opción B.

7. Si $A=\begin{pmatrix} 4 & 2 & 6 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$ y B es la matriz que resulta de multiplicar por 1/2 la primera y segunda filas de A y calcular su traspuesta, entonces se cumple:

A) El determinante de A es igual al determinante de B; B) El determinante de A es dos veces el determinante de B; C) El determinante de B es dos veces el determinante de A; D) Ninguna de las anteriores.

Vamos a hacer las transformaciones de una en una y diremos cómo afecta al determinante.

Transformación	Matriz	Determinante
$F_1 \to \frac{1}{2}F_1$	$B_1 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\lvert B_1\rvert = \frac{1}{2}\lvert A\rvert$
$F_2 \to \frac{1}{2}F_2$	$B_2 = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 1/2 & 0 \\ 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$	$\lvert B_2\rvert = \frac{1}{2}\lvert B_1\rvert = \frac{1}{2}\frac{1}{2}\lvert A\rvert = \frac{1}{4}\lvert A\rvert$
Calcular la traspuesta de B_2	$B = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 5 \\ 1 & 1/2 & 2 \\ 3 & 0 & 4 \end{pmatrix}$	$\lvert B\rvert = \lvert B_2\rvert = \frac{1}{4}\lvert A\rvert$

$|B| = \frac{1}{4}|A| \Leftrightarrow |A| = 4|B| \Rightarrow$ Sólo es correcta la opción D.

8. El determinante $\begin{vmatrix} 1+x+x^2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x+x^2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x+x^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x+x^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+x+x^2 \end{vmatrix}$ reducido a producto de factores reales irreducibles en $\mathbb{R}$ es: A) $(5 + x + x^2)$

$(1+x)^2 x^4$; B) $(5+x+x^2)(1+x)^4 x^4$; C) $(5+x+x^2)(x+x^2)^4$; D) Ninguna de las anteriores.

Lo más sencillo, para simplificar los cálculos, es operar con las filas y columnas, aplicando las propiedades de los determinantes.

Paso 1: se sustituye C_1 por $C_1 + C_2 + C_3 + C_4 + C_5$.

$$|A| = \begin{vmatrix} 1+x+x^2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x+x^2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x+x^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x+x^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+x+x^2 \end{vmatrix} \overset{①}{=}$$

$$= \begin{vmatrix} 5+x+x^2 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 5+x+x^2 & 1+x+x^2 & 1 & 1 & 1 \\ 5+x+x^2 & 1 & 1+x+x^2 & 1 & 1 \\ 5+x+x^2 & 1 & 1 & 1+x+x^2 & 1 \\ 5+x+x^2 & 1 & 1 & 1 & 1+x+x^2 \end{vmatrix} \overset{②}{=}$$

$$= (x^2+x+5) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1+x+x^2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1+x+x^2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+x+x^2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1+x+x^2 \end{vmatrix}$$

Paso 2: Todos los elementos de la primer columna son $(5+x+x^2)$. Por tanto, se puede sacar factor común $5+x+x^2$.

Paso 3. Se sustituye cada columna C_i $(i = 2 \ldots 5)$ por $C_i - C_1$

$$|A|=\left(x^2+x+5\right)\begin{vmatrix}1 & 0 & 0 & 0 & 0\\ 1 & x+x^2 & 0 & 0 & 0\\ 1 & 0 & x+x^2 & 0 & 0\\ 1 & 0 & 0 & x+x^2 & 0\\ 1 & 0 & 0 & 0 & x+x^2\end{vmatrix}.$$

Paso 4: Como la matriz obtenida es triangular, su determinante es el producto de los factores de la diagonal principal

$$|A|=(x^2+x+5)\,(x+x^2)^4=(x^2+x+5)\,(1+x)^4\,x^4.$$

$\Rightarrow$ Es correcta la opción B porque los factores que intervienen en el producto son irreducibles.

9. Si $A=\begin{pmatrix}1+a & 1\\ 1 & 1+b\end{pmatrix}$ y $a,\ b\neq 0$, se verifica: A) $|A|=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a$

B) $|A|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & b\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}$; C) $|A|=\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{vmatrix}+$

D) Ninguna de las anteriores.

Una forma de hacerlo es calcular los determinantes de cada opción y compararlo con $|A|$:

¿Determinante de A?.

$$|A|=\begin{vmatrix}1+a & 1\\ 1 & 1+b\end{vmatrix}=(1+a)(1+b)-1=b+a+ab.$$

¿Determinantes dados en la opción A?.

$$\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{vmatrix}=1-1+ab.$$

¿Determinantes dados en la opción B?.

$$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & b\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=b+ab+0+a.$$

¿Determinantes dados en la opción C?.

$$\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & 0\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}0 & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}=0+ab+0.$$

$\Rightarrow$ Sólo es cierta la respuesta B.

Otra forma de hacerlo es utilizando las propiedades de los determinantes:

$$|A|=\begin{vmatrix}1+a & 1+0\\ 1+0 & 1+b\end{vmatrix}=\begin{vmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}1 & 0\\ 1 & b\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 1\\ 0 & 1\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}a & 0\\ 0 & b\end{vmatrix}.$$

❖ Si en una matriz cuadrada A, una de sus filas (o columnas) se expresa como suma de dos nuevas filas (o columnas), su determinante es igual a la suma de los determinantes de las matrices A_1 y A_2 que se obtienen al sustituir, en A, esta fila (o columna) por cada una de las filas (columnas) sumandos.

10. Sabiendo que $\begin{vmatrix}x & y & z\\ 1 & 0 & 2\\ 1 & 1 & 3\end{vmatrix}=1$, el valor de $\begin{vmatrix}x & 1/4 & 4\\ y & 0 & 4\\ z & 1/2 & 12\end{vmatrix}$ es: A) 2; B) 1;

C) 0; D) Ninguno de las anteriores.

Aplicaremos las propiedades de los determinantes para relacionar el segundo con el primero:

$$\begin{vmatrix} x & 1/4 & 4 \\ y & 0 & 4 \\ z & 1/2 & 12 \end{vmatrix} = 4\frac{1}{4}\begin{vmatrix} x & 1 & 1 \\ y & 0 & 1 \\ z & 2 & 3 \end{vmatrix} = 1\begin{vmatrix} x & y & z \\ 1 & 0 & 2 \\ 1 & 1 & 3 \end{vmatrix} = 1.1 = 1.$$

En el primer paso se ha sacado factor común 4 a los elementos de la tercera columna y 1/4 a los de la segunda. En el segundo paso se ha tenido en cuenta que el determinante de una matriz es igual al determinante de su traspuesta.

⇒ La única respuesta correcta es la B.

11. El valor del determinante de orden n cuyas filas son: (0, 1, 1, ..., 1), (1, 0, 1, ..., 1), (1, 1, 0, ..., 1), ..., (1, 1, 1, ..., 0) es: A) $(-1)^{n-1}$ $(n-1)$; B) $n(-1)^{n-1}$; C) n; D) Ninguna de las anteriores.

El proceso que se sigue es:

Paso 1: $C_1 \to C_1 + C_2 + ... + C_n$.

❖ Si en una matriz hay una fila (columna) combinación lineal de otras filas (columnas), su determinante es cero.

$$\begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 0 & 1 & ... & 1 \\ 1 & 1 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ 1 & 1 & 1 & ... & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & ... & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & ... & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & ... & 1 \\ ... & ... & ... & ... & ... \\ n-1 & 1 & 1 & ... & 0 \end{vmatrix}.$$

Paso 2: Sacar factor común $(n-1)$ en la primera columna

❖ Si en una matriz se multiplican todos los elementos de una fila (columna) por un mismo escalar λ, el determinante de la matriz resultante queda multiplicado por λ.

$$\begin{vmatrix} n-1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ n-1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ n-1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ n-1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix}.$$

Paso 3: $F_i \rightarrow F_i - F_1$, para $i = 2, \dots, n$

❖ Hemos aplicado la misma propiedad que en el paso 1, con el objetivo de obtener un determinante con muchos ceros que sea de cálculo más fácil y tenga el mismo valor que el dado.

$$(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 0 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 0 & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 0 \end{vmatrix} = (n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix}.$$

Paso 4: El determinante que queremos calcular corresponde a una matriz triangular

$$(n-1) \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 0 & -1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & -1 & \dots & 0 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 0 & 0 & \dots & -1 \end{vmatrix} = (n-1)(-1)^{n-1}.$$

$\Rightarrow$ Sólo es correcta la opción A.

12. La ecuación $\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = 0$ verifica: A) Tiene al menos dos raíces distintas; B) Tiene una sola raíz; C) No se pueden determinar sus raíces; D) Ninguna de las anteriores.

Para simplificar el cálculo del determinante, aplicaremos las propiedades de los mismos. No hay una regla fija para transformar un determinante en otro más sencillo de calcular, pero sí hay un objetivo: conseguir el mayor número posible de ceros. En este caso se obtiene una matriz triangular si hacemos:

$C_2 \to C_2 - C_1$
$C_3 \to C_3 - C_1$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & x & 1 \\ 1 & 1 & x^2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 1 & x-1 & 0 \\ 1 & 0 & x^2-1 \end{vmatrix} = (x-1)(x^2-1) = (x-1)(x+1)(x-1) =$$
$$= (x-1)^2(x+1).$$

La ecuación queda reducida a $(x-1)^2(x+1) = 0$, y su solución es $x = \pm 1$.
$\Rightarrow$ Es cierta la opción A y el resto son falsas.

13. La solución de la ecuación: $\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^3 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = x^2 - 2x + 1$ es: A) $x = \pm 3$; B) $x = 1, x = 1/3$; C) No se puede resolver; D) Ninguna de las anteriores

❖ La forma estándar de una ecuación es un polinomio igualado a 0.

¿Qué polinomio representa al valor del determinante?.

Si hacemos las transformaciones elementales siguientes: $F_1 \to F_1 - F_2$, $F_3 \to F_3 - F_2$, $F_4 \to F_4 - F_2$, y desarrollamos por la primera columna, sacando además factor común $(x-1)$ obtenemos:

$$\begin{vmatrix} 1 & x & x^2 & x^2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 4 & 9 & 16 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & x-1 & x^2-1 & x^2-1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 & 12 \end{vmatrix} = (-1)^{2+1}(x-1)\begin{vmatrix} 1 & x+1 & x+1 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 6 & 12 \end{vmatrix}$$

Haciendo $F_1 \to F_1 - F_2$ y $F_3 \to F_3 - 2F_2$ y desarrollando por la primera columna resulta:

$$-(x-1)\begin{vmatrix} 0 & x-1 & x-2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 0 & 2 & 6 \end{vmatrix} = -(-1)^{2+1}(x-1)\begin{vmatrix} x-1 & x-2 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$= (x-1)[6(x-1)-2(x-2)] = (x-1)(4x-2).$$

¿Cuál es la ecuación dada?.

$$(x-1)(4x-2) = x^2 - 2x + 1 = (x-1)(x-1)$$

La igualdad entre los dos miembros es cierta si $x-1=0$ o si $4x-2=x-1$

$$\Rightarrow \begin{cases} x-1=0 \Rightarrow x=1 \\ 4x-2=x-1 \Rightarrow x=\dfrac{1}{3} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Es cierta la opción B, y el resto son falsas.

14. El determinante de la matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+d \end{pmatrix}$ es: A) 0; B) $ab \dots d$; C) $(1+a)(1+b) \dots (1+d)$; D) Ninguno de los anteriores.

Si sustituimos $C_1 \to C_1 - C_2$.

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -a & 1+a & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1+b & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & \dots & \dots & \dots & 1+d \end{vmatrix}$$

y desarrollamos el determinante por la columna 1, resulta:

$$a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & \dots & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+d \end{vmatrix}$$

que es el determinante de una matriz de orden uno menos que la dada, pero con la misma forma. Repitiendo sucesivamente el mismo proceso con cada una de las matrices que van apareciendo rebajamos el orden de la matriz hasta que queda de orden 1:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+a & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+b & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1 & 1+c & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & 1 & \dots & 1+d \end{vmatrix} = a \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+b & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1 & 1+c & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & 1 & \dots & 1+d \end{vmatrix} =$$

$$= a \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & \dots & 1 \\ -b & 1+b & 1 & \dots & 1 \\ 0 & 1 & 1+c & \dots & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \\ 0 & 1 & 1 & \dots & 1+d \end{vmatrix} = ab \begin{vmatrix} 1 & 1 & \dots & 1 \\ 1 & 1+c & \dots & 1 \\ \dots & \dots & \dots & \dots \\ 1 & 1 & \dots & 1+d \end{vmatrix} = \dots = abc\dots d$$

$\Rightarrow$ Es cierta la opción B.

Ejercicios relativos a:

"Cálculo de la matriz inversa."

1. Si A, B, C y D son matrices tales que A, B, C son distintas y A es una matriz cuadrada regular que cumple $D + AB = AC + D$, entonces: A) $B = C$; B) $B = A$; C) $A = B = D$; D) Ninguna de las anteriores.

Podemos operar con la expresión dada:

$$D + AB = AC + D \Leftrightarrow AB - AC = D - D \Rightarrow A(B - C) = 0.$$

Si multiplicamos la igualdad anterior por A^{-1} por la izquierda, como $A^{-1}A = I$, resulta:

$$A^{-1}A(B - C) = A^{-1}0 = 0 \Rightarrow B - C = 0 \Rightarrow B = C.$$

Hemos utilizado que A es una matriz regular y por tanto existe A^{-1}. $\Rightarrow$ Es cierta la opción A.

Además la opción B no puede ser porque si $B = A$ resulta:

$$D + AB = BC + D \Rightarrow BB - BC = D - D \Rightarrow B\,(B - C) = 0$$

si multiplicamos por B^{-1} por la izquierda resulta: $B = C$ y como $B = A$ serían A, B, C iguales en contradicción con las hipótesis iniciales.

La opción C no se deduce del desarrollo anterior $\Rightarrow$ Es falsa.

2. Si A, B, C son matrices cuadradas de orden n y existe A^{-1}, cuando se cumple que $A^{-1}(B + C) = DA$, entonces también se cumple: A) $|B + C| = |D|$;

B) $|A|\,|B+C| = |D|\,|A|$; C) $|B+C| = |D|\,|A^2|$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n, se verifica: $|AB| = |A|\,|B|$. Si $A^{-1}(B+C) = DA$, entonces,

$$|A^{-1}|\,|B+C| = |D|\,|A|,$$

por ser $|A^{-1}| = |A|^{-1}$ resulta

$$|A|^{-1}\,|B+C| = |D|\,|A| \Rightarrow |A|\,|A|^{-1}\,|B+C| = |A|\,|D|\,|A| = |A|^2\,|D|$$
$$\Rightarrow |B+C| = |D|\,|A|^2 = |D|\,|A^2|.$$

❖ Recordemos que $|A^2| = |AA| = |A|\,|A| = |A|^2$.

⇒ La opción cierta es la C.

3. Si A y B son dos matrices cuadradas de orden n (distinto de uno), se cumple que: A) Si A tiene inversa A^{-1}, entonces $(A+B)\,A^{-1} = A^{-1}\,(A+B)$; B) Si A tiene inversa A^{-1}, entonces $(A+B)\,A^{-1}\,(A-B) = (A-B)\,A^{-1}\,(A+B)$; C) $(A-B)^2 = A^2 - 2AB + B^2$; D) Ninguna de las anteriores.

Opción A:

1º miembro: $AA^{-1} + BA^{-1} = I + BA^{-1}$.
2º miembro: $A^{-1}A + A^{-1}B = I + A^{-1}B$.

❖ El produco de matrices no es conmutativo ⇒ La opción A no es cierta.

Se puede demostrar que es falsa con un ejemplo. Si elegimos $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ y

$B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y operamos, tenemos que $A^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 \end{pmatrix}$ y por otro lado

$$(A+B)A^{-1}=\left(\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&0\\1/2&3/2\end{pmatrix}.$$

$$A^{-1}(A+B)=\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}\left(\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1/2&-1/2\\1/2&1/2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&-1/2\\0&3/2\end{pmatrix}.$$

Como son matrices distintas, podemos afirmar que A no es cierta.

Opción B.

1º miembro: $(A + B)\,A^{-1}\,(A - B) = (A + B)\,(I - A^{-1}B) = A - B + B - BA^{-1}\,B =$
$= A - BA^{-1}B.$
2º miembro: $A - BA^{-1}\,B = (A - B)\,A^{-1}\,(A + B).$

$\Rightarrow$ La opción B es cierta.

Opción C:

1º miembro: $(A - B)^2 = (A - B)\,(A - B) = A^2 - BA - AB + B^2.$
2º miembro: $A^2 - 2AB + B^2.$

La igualdad de los dos miembros no es cierta, porque el producto de matrices, en general, no es conmutativo.

Se puede comprobar con un contraejemplo.

$$(A-B)^2=\left(\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right)^2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1&1\\-1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&3\\-3&3\end{pmatrix}$$

$$A^2-2AB+B^2=\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}^2-2\begin{pmatrix}1&1\\-1&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}^2=$$

$$=\begin{pmatrix}0&2\\-2&0\end{pmatrix}-2\begin{pmatrix}0&1\\0&-1\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\-2&3\end{pmatrix}.$$

Además si $n = 1$, esta opción es siempre cierta, pero este caso no está incluido.

$\Rightarrow$ La opción C es falsa.

4. Si A y B son matrices cualesquiera, es cierto que: A) Si la matriz AB tiene inversa, necesariamente A y B tienen inversa; B) Si las matrices A y B tienen inversa entonces AB tiene inversa; C) Puede ocurrir que $A = A^{-1}$; D) Ninguna de las anteriores.

A es falsa: Si $A \in M_{m\times n}$, $B \in M_{n\times m} \Rightarrow AB \in M_{m\times m}$, y puede tener inversa, pero si $m \neq n$, A y B no tienen inversa porque no son matrices cuadradas.

B también es falsa en general, ya que si $A \in M_{m\times m}$ y $B \in M_{n\times n}$, , siendo $m \neq n$ entonces AB no existe. Pero si existe el producto AB siempre se cumple B, porque $(AB)^{-1} = B^{-1} A^{-1}$.

C es cierta porque pueden existir matrices tales que la matriz coincide con su inversa. En particular, para el caso $A = I$ sí se cumple.

5. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix}$, es cierto que: A) $AB = I$; B) B es la inversa de A; C) A no tiene inversa; D) Ninguna de las anteriores.

La opción A es cierta y se comprueba haciendo operaciones:

$$\begin{pmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ -1 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2-1 & 2-2 \\ 1-1 & 1-2+2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

❖ Para que una matriz A tenga inversa, hace falta que sea cuadrada y que $AA^{-1} = A^{-1} A = I$.

Como A no es cuadrada, no tiene inversa y por tanto B no puede ser su inversa.

⇒ C es también correcta y B es falsa.

6. Cuando existe, la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & k\\ 2 & -2\end{pmatrix}$ es: A) Ella misma; B) $\begin{pmatrix}\frac{1}{(1+k)} & \frac{k}{2(1+k)}\\ \frac{1}{(1+k)} & -\frac{1}{2(1+k)}\end{pmatrix}$; C) A es singular para $k=-1$; D) No existe para ningún valor de k.

❖ Cualquier matriz cuadrada tiene inversa si su determinante es distinto de 0. En este caso se dice que es regular.

❖ Una matriz singular es una matriz no regular.

Entonces, si A es una matriz regular, su determinante es distinto de 0, lo que ocurre si

$$\begin{vmatrix}1 & k\\ 2 & -2\end{vmatrix}=-2-2k\neq 0\Leftrightarrow k\neq -1.$$

$\Rightarrow$ C es correcta.

Suponemos $k\neq -1$ y calculamos la matriz inversa mediante la fórmula $A^{-1}=\frac{1}{|A|}\cdot(\overline{A})^t$, siendo $\overline{A}$ la matriz adjunta de A.

❖ $\overline{A}\in M_{n\times n}$ es la matriz adjunta de $A\Leftrightarrow\overline{A}$ es la matriz que resulta de sustituir cada elemento por su adjunto correspondiente.

$\overline{A}=\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -k & 1\end{pmatrix}$, por lo tanto, la inversa es:

$$A^{-1}=\frac{1}{-2-2k}\begin{pmatrix}-2 & -2\\ -k & 1\end{pmatrix}^t=\frac{1}{-2-2k}\begin{pmatrix}-2 & -k\\ -2 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\frac{1}{1+k} & \frac{k}{2(1+k)}\\ \frac{1}{1+k} & \frac{-1}{2(1+k)}\end{pmatrix}.$$

Como la inversa es única, A es falsa y B es correcta.

7. La inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2 & -1\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ verifica: A) Su primera fila es (0 1 0); B) Su segunda fila es (0 1 0); C) Su segunda columna es (0 −1 1) D) Ninguna de las anteriores.

❖ La matriz inversa A^{-1} de una matriz A, si existe, se pueda calcular mediante transformaciones elementales en las filas de A, tales que,

$$(A\,|\,I)\xrightarrow{\text{transfo. elemen.}}(I\,|\,A^{-1}).$$

Calculamos A^{-1} a través de operaciones elementales entre las filas:

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1 & 0 & 0 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3\to F_3+F_1}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 2 & -2 & 1 & 0 & 1\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_3\to F_3-2F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & -2 & 1 & -2 & 1\end{array}\right)\xrightarrow{F_3\to\frac{1}{2}F_3}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 2 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2\end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{F_1\to F_1-2F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & -1 & 1 & -2 & 0\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2\end{array}\right)\xrightarrow{F_1\to F_1+F_2}\left(\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 0 & 1/2 & -1 & -1/2\\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -1/2 & 1 & -1/2\end{array}\right).$$

Y por tanto, la inversa de A es la matriz $A^{-1}=\begin{pmatrix}1/2 & -1 & -1/2\\ 0 & 1 & 0\\ -1/2 & 1 & -1/2\end{pmatrix}$.

⇒ La única respuesta correcta es la opción B.

8. Si calculamos la inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ mediante un sistema de ecuaciones resultan: A) 4 ecuaciones y 3 incógnitas; B) 3 ecuaciones y 4 incógnitas; C) 4 ecuaciones y 4 incógnitas; D) Ninguna de las anteriores.

Si $A^{-1}=\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix}$, se verifica:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}x+2z & y+2u\\ z & u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}x+2z=1\\ y+2u=0\\ z=0\\ u=1\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}x=1\\ y=-2\\ z=0\\ u=1\end{cases}.$$

Hemos tenido que resolver un sistema de 4 ecuaciones y 4 incógnitas.

$\Rightarrow$ La única respuesta correcta es la opción C.

9. La matriz inversa verifica: A) Si existe no es única; B) Toda matriz cuadrada tiene inversa; C) Toda matriz simétrica tiene inversa; D) Ninguna de las anteriores.

Opción A: «La matriz inversa, si existe, es única». En efecto, si A es una matriz invertible y B y C son inversas suyas, entonces sería

$$AB=AC=I=BA=CA\Rightarrow AB-AC=0\Rightarrow A(B-C)=0.$$

Si multiplicamos por la izquierda por B se tiene: $BA\ (B-C)=B0=0$. Por otro lado, por ser $BA=I$ resulta:

$$I(B-C)=0\Rightarrow B-C=0\Rightarrow B=C.$$

Luego las dos inversas coinciden $\Rightarrow$ A es falsa.

Opción B: «Toda matriz cuadrada tiene inversa». Es falso porque sólo las matrices cuyo determinante es distinto de 0 tienen inversa.

Opción C: «Toda matriz simétrica tiene inversa». Es falso. Ejemplo: Si tomamos $A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 1\end{pmatrix}$, es simétrica pero su determinante es 0 luego no tiene inversa.

$\Rightarrow$ Sólo es cierta la opción D.

10. La inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ es: A) Ella misma; B) Como es singular, no tiene inversa; C) Como es regular, no tiene inversa; D) Ninguna de las anteriores.

Las matrices regulares son precisamente las matrices que tienen inversa. Luego C es falsa. Para ver si B es cierta, tenemos que demostrar que A es singular, lo que quiere decir que su determinante es 0:

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}=1\cdot 4-2\cdot 3=4-6=-2\neq 0$$

$\Rightarrow A$ no es singular y la opción B es falsa.

Para comprobar si A es cierta, multipliquemos A por sí misma:

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}7 & 10\\ 15 & 22\end{pmatrix}\neq\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ A tampoco es cierta. La única respuesta correcta es la D.

11. La inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ es: A) $\begin{pmatrix}2 & -1\\ -3/2 & 1/2\end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix}-2 & 3/2\\ 1 & -1/2\end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ La inversa de una matriz se puede calcular como la traspuesta de la adjunta, dividida entre el determinante de la matriz.

En el ejercicio anterior, vimos que el determinante de $\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}$ es distinto de 0 y por tanto existe la inversa de A.

$$\begin{pmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{pmatrix}^{-1}=\frac{\begin{pmatrix}4 & -3\\ -2 & 1\end{pmatrix}^{t}}{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\end{vmatrix}}=\begin{pmatrix}-2 & 3/2\\ 1 & -1/2\end{pmatrix}^{t}=\begin{pmatrix}-2 & 1\\ 3/2 & -1/2\end{pmatrix}.$$

⇒ La respuesta correcta es **C**.

12. La inversa de $\begin{pmatrix}x & -2\\ 5 & -x\end{pmatrix}$ coincide con su opuesta cuando: A) $x = 1$; B) $x=-3$; C) $x=3$; D) Ninguna de las anteriores.

Que la inversa de la matriz coincida con la opuesta significa que:

$$\begin{pmatrix}x & -2\\ 5 & -x\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-x & 2\\ -5 & x\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}\Rightarrow -x^2+10=1\Rightarrow x=\pm 3.$$

⇒ Son ciertas las opciones B y C.

13. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & k\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$: A) Para $k=0$ es $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$;

B) Para $k=0$ es $A^{-1}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 1 & 0 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}$; C) No tiene inversa para $k=1$;

D) Ninguna de las anteriores.

❖ Para que A tenga inversa su determinante debe ser distinto de 0.

¿Cuándo es $|A|\neq 0$*?.*

$$\begin{vmatrix}1 & 1 & k\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{vmatrix}=1\cdot 1(-1)+1\cdot 0\cdot(-1)+0\cdot 0\cdot k-k\cdot 1\cdot(-1)-1\cdot 0\cdot 0-1\cdot 0\cdot(-1)=-1+k.$$

El determinante es distinto de 0 si k es distinto de 1, lo que significa que sólo en este caso la matriz es regular y, por lo tanto, tiene inversa.

⇒ La opción C es correcta.

Para ver si son correctas A o B, consideramos $k=0$, quedando $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ y $|A|=-1$.

¿Matriz inversa?.

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\overline{A}^{t}=\frac{1}{-1}\overline{\begin{pmatrix}1 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}}^{t}=-\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & -1 & -1\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}^{t}=\begin{pmatrix}1 & -1 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 1 & -1\end{pmatrix}.$$

⇒ A es correcta y B es falsa.

14. La inversa de la matriz $A=\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}$ es: A) Ella misma; B) No tiene inversa; C) $\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

A partir del ejercicio anterior, observamos que es la misma matriz para $k = 2$, valor de k para el que se trataba de una matriz regular. Entonces B no es correcta. La inversa se determina como en el ejercicio anterior, con $|A| = 1$

$$A^{-1}=\frac{1}{|A|}\overline{A}^{t}=\frac{1}{1}\overline{\begin{pmatrix}1 & 1 & 2\\ 0 & 1 & 0\\ -1 & 0 & -1\end{pmatrix}}^{t}=\begin{pmatrix}-1 & 0 & 1\\ 1 & 1 & -1\\ -2 & 0 & 1\end{pmatrix}^{t}=\begin{pmatrix}-1 & 1 & -2\\ 0 & 1 & 0\\ 1 & -1 & 1\end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ La única respuesta correcta es la **C**.

15. Dada la ecuación matricial $\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0 & 2\\ 1 & 3\end{pmatrix}$, se verifica:

A) $\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & -1/2\\ 4/3 & -1/3\end{pmatrix}$; B) No tiene solución;

C) $\begin{pmatrix}x & y\\ z & u\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}-11/6 & 2/3\\ -7/3 & 2/3\end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

Denotamos $A=\begin{pmatrix}2 & -1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 1 & -1\end{pmatrix}$. Para resolver esta ecuación, lo más

sencillo es escribir la ecuación como $A\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}B=\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}$ y determinar A^{-1} y B^{-1}, si existen, para transformarla en $\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}=A^{-1}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}B^{-1}$.

$$\begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}^{t}=\frac{1}{2}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}^{-1}=\frac{1}{|B|}\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ -2 & 1 \end{pmatrix}^{t}=\frac{1}{-3}\begin{pmatrix} -1 & -2 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

La ecuación queda

$$\begin{pmatrix} x & y \\ z & u \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/3 & 2/3 \\ 1/3 & -1/3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & -1/2 \\ 4/3 & -1/3 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ La única respuesta correcta es A.

16. Para que A sea una matriz real, diagonal de orden 2, que tiene inversa y cumple $A^2-\alpha A+\beta I=0$ (siendo I matriz unitaria y 0 la matriz nula de orden 2 y $\alpha\neq 0$), debe ser: A) $\beta=0$ y α cualquier número real; B) $\alpha=0$ y β cualquier número real; C) $\alpha=0$ y $\beta=0$; D) Ninguna de las anteriores.

La matriz A es de la forma $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix}$ con $ab\neq 0$.

Si $\beta=0$ se verifica:

$$A^2-\alpha A+\beta I=0\Leftrightarrow A^2-\alpha A=0\Leftrightarrow A^2=\alpha A\Leftrightarrow A^2=\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \alpha a & 0 \\ 0 & \alpha b \end{pmatrix},$$

y como $ab\neq 0$, tiene solución $a=b=\alpha$.

$\Rightarrow$ La opción A es falsa, porque α no podría ser cualquier número real, ni A una matriz diagonal cualquiera.

B es falsa porque si $\alpha = 0$ se tendría que cumplir que $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\beta & 0 \\ 0 & -\beta \end{pmatrix}$, que es equivalente a $\begin{cases} a^2 = -\beta \Rightarrow a = \pm\sqrt{-\beta} \\ b^2 = -\beta \Rightarrow b = \pm\sqrt{-\beta} \end{cases}$. Pero β es cualquier número real y entonces podría ocurrir que la matriz A fuese no real.

C es falsa porque si $\alpha = 0$, $\beta = 0$ significa que $\begin{pmatrix} a^2 & 0 \\ 0 & b^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, es decir, $a = b = 0$ y entonces A no sería invertible, en contradicción con las hipótesis.

$\Rightarrow$ D es la única respuesta correcta.

17. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & b \\ a & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ tiene inversa: A) Para $a = 1$ y cualquier valor de b; B) Para $b = 1$ y cualquier valor de a; C) No tiene solución; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Una matriz es invertible cuándo su determinante es distinto de 0:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & b \\ a & 2 & -1 \\ 3 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 2 - 3 + ab - 6b - a + 1 = ab - 6b - a = a(b-1) - 6b \neq 0$$

$\Leftrightarrow a \neq \dfrac{6b}{b-1}$ si $b \neq 1$, o para todo a cuando $b = 1$ (ya que el determinante es $a - a - 6 = -6 \neq 0$).

$\Rightarrow$ La única respuesta correcta es la opción B.

18. La inversa de una matriz cuadrada puede coincidir con su adjunta: A) Sí, pero sólo en determinados casos; B) Nunca; C) Siempre coinciden por ser cuadradas; D) Ninguna de las anteriores.

Sabemos que la inversa de una matriz se puede calcular como $A^{-1} = \frac{1}{|A|}\overline{A}^t$.

Observando esta relación, podemos afirmar, por ejemplo, que la inversa de una matriz A y su traspuesta A^t coinciden cuando el determinante de A es 1 y la matriz adjunta es simétrica.

$\Rightarrow$ Sólo es cierta la opción A.

19. Si A es una matriz que verifica la relación $A^2 - A - I = 0$, entonces: A) No existe A^{-1}; B) Si existe A^{-1}, entonces $A^{-1} = A - I$; C) Sólo existe A^{-1} si $A = I$; D) Ninguna de las anteriores.

La opción A es falsa porque si consideramos la matriz $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$, se verifica $A^2 - A - I = 0$ y, además, $\det(A) \neq 0$. Luego existe A^{-1}.

Es cierta la opción B. Si existe A^{-1} se verifica $A^{-1}A = I$ (por definición de inversa) entonces, A^{-1} vale $A - I \Leftrightarrow (A - I)A = I \Leftrightarrow A^2 - A - I = 0$.

C también es falsa porque si $A = I$, no se verifica $A^2 - A - I = 0$ ya que sería $I^2 - I - I = -I = 0$, que es una contradicción.

20. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & a \\ b & c \end{pmatrix}$, $I = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, para que $A^{-1} = 2I - A$ se debe verificar: A) $-ab = 1$ y $c = 0$; B) $a = b = c = 0$; C) Siempre se verifica $A^{-1} = 2I - A$; D) Ninguna de las anteriores.

$$A^{-1} = 2I - A \Rightarrow AA^{-1} = A(2I - A) \Rightarrow I = 2A - A^2.$$

La expresión anterior equivale a:

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2 & a\\ b & c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}2 & a\\ b & c\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & a\\ b & c\end{pmatrix}=2\begin{pmatrix}2 & a\\ b & c\end{pmatrix}-\begin{pmatrix}4+ab & 2a+ac\\ 2b+cb & ab+c^2\end{pmatrix}=$$
$$=\begin{pmatrix}-ab & -ac\\ -bc & 2c-ab-c^2\end{pmatrix}.$$

Igualando los términos que ocupan la misma posición resulta:

$ab=-1.$

$ac=bc=0\Rightarrow a=0$ ó $c=0$; $b=0$ ó $c=0.$

$2c-ab-c^2=1\Rightarrow 2c-c^2+1=1\Rightarrow c(2-c)=0\Rightarrow c=0$ ó $c=2.$

Si $c\neq 0$, entonces debe ser $a=b=0$ y no sería posible $ab=-1$. Luego $c=0$ y $ab=-1\Rightarrow$ Sólo es cierta la opción A.

21. Sabiendo que A, B son matrices regulares distintas de la identidad tales que, $B=2A-I$ y $A^2=I$, de entre las siguientes afirmaciones, es correcta: A) $B^3=B$; B) $B^{-1}=B$; C) $B^{-1}=A$; D) Ninguna de las anteriores.

¿Es $B^3=B$*?.*

$$B^3=(BB)B=\big((2A-I)(2A-I)\big)(2A-I)=(4A^2-2A-2A+I)(2A-I)=$$
$$=(4I-4A+I)(2A-I)=(5I-4A)(2A-I)=10A-5I-8A^2+4A=$$
$$=14A-5I-8I=14A-13I\neq B.$$

$\Rightarrow$ A no es cierta.

¿Es $B^{-1}=B$*?.*

Si $B^{-1}=B$ su producto debe ser la identidad.

$$B^{-1}B=(2A-I)(2A-I)=4A^2-2A-2A+I=4I-4A+I=5I-4A\neq I.$$

$\Rightarrow$ B también es falsa.

¿Es A la inversa de B?.

Si A es la inversa de B su producto debe ser la identidad

$$AB = A(2A - I) = 2A^2 - A = 2I - A \neq I$$

porque $A \neq I$ por hipótesis $\Rightarrow$ C tampoco es cierta.

$\Rightarrow$ La única opción correcta es D.

Ejercicios relativos a:

"Determinación del rango de una matriz; rango de un endomorfismo y rango de un sistema de vectores."

1. Utilizando determinantes, se puede saber si un sistema S de m vectores de un espacio vectorial V de dimensión n es: A) Base del subespacio que genera; B) Libre; C) Base del espacio V; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Los vectores de S tienen n coordenadas $\Rightarrow$ la matriz A que se forma al tomarlos como filas es de dimensión $m \times n$.

Si $n = m$ se puede calcular $|A|$; si $|A| \neq 0 \Rightarrow S$ está formado por n vectores linealmente independientes, es decir, forman una base del espacio V.

$\Rightarrow$ La opción C es correcta.

Si $m < n$, la matriz A no es cuadrada y no existe su determinante, pero se pueden calcular los menores. El mayor orden de los menores distintos de 0 es el rango de la matriz.

Si el rango de la matriz $m \Rightarrow S$ es un sistema libre.

$\Rightarrow$ La opción B es cierta.

Los m vectores de S son sistema de generadores de $\langle S \rangle$ si además es libre $\Rightarrow$ son base de $\langle S \rangle$.

$\Rightarrow$ La opción A es cierta.

2. El conjunto de vectores $S = \{(1, 0, 1), (3, 1, -1), (2, 0, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ es: A) Una base de $\mathbb{R}^3$; B) Un sistema libre, pero no es base; C) No es un sistema libre; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Sabemos que un conjunto de n vectores de un espacio n-dimensional es libre si y sólo si el determinante de la matriz cuyas filas (o columnas) son los vectores es distinto de 0.

¿Determinante cuyas columnas sean los vectores de S?.

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0+0-2-0-0 = -2 \neq 0.$$

Como es distinto de 0, es un sistema libre. Como la dimensión del espacio vectorial es 3 y los 3 vectores son l.i., sí es base ⇒ Sólo es correcta la opción A.

❖ Si hubiéramos formado la matriz con las filas, el resultado no variaría. Tendríamos el determinante de la matriz traspuesta, que tiene el mismo valor.

3. El conjunto de vectores $\{(1, 2, k), (3, 1, -1), (1, -1, 0)\}$ de $\mathbb{R}^3$ es libre si: A) $k \neq 1$; B) $k \neq 2$; C) $k \neq 3$; D) Para ninguno de los valores anteriores.

Como en el ejercicio anterior, calculamos el determinante de la matriz cuyas columnas son los vectores:

$$\begin{vmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ k & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0-3k-2-k-1-0 = -4k-3.$$

El sistema es libre si el determinante es distinto de 0, lo que ocurre si $k \neq -3/4$.

⇒ La única respuesta correcta es la opción D.

4. Si A es una matriz de orden $n \times n$ y se verifica que rg $A = r$, siendo $r < n$, entonces: A) No es posible; B) Puede haber un menor de orden $r + 1$ que

sea distinto de 0; C) Hay un menor de orden r distinto de 0 y todos los de orden $r+1$ son 0; D) Ninguna de las anteriores.

❖ El rango de una matriz cuadrada de orden n es el mayor de los órdenes de sus menores no nulos.

Que el rango sea $r < n$ quiere decir que, si consideramos las submatrices de orden r hay una al menos una cuyo determinante es distinto de 0 y que el determinante de todas las de orden $r+1$ o superior es $0 \Rightarrow$ B es falsa y C es cierta.

La opción A también es falsa porque sí puede ser que el rango de una matriz cuadrada sea menor que el orden; esto ocurre cuando el rango no es máximo o, lo que es lo mismo, cuando hay $n - r$ filas o columnas que dependen linealmente del resto.

5. El rango de la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 & 2 & 1 \end{pmatrix}$ es: A) 1; B) 2; C) 3; D) Ninguna de las anteriores.

Para determinar el rango intentamos, en primer lugar y si es posible, detectar filas o columnas que sean combinación lineal de otras. Observamos que la tercera columna es la primera menos la segunda: la podemos eliminar, quedando

$$\operatorname{rg} A = \operatorname{rg} \begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 & 3 \\ 1 & -1 & 1 & 2 \\ 0 & 1 & 2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Como no son evidentes otras dependencias lineales, procedemos a determinar el rango buscando, siguiendo un método, menores cada vez de rango mayor:

Elección de algún menor distinto de 0. Con rango 1: $a_{11} = 1$.

Ampliamos a una submatriz de orden 2 con determinante distinto de 0: $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$,

cuyo determinante es $-3 \Rightarrow$ el rango es mayor o igual que 2. Esto significa que los vectores que forman las dos columnas son l.i., y que también lo son los vectores que forman las filas.

El máximo rango que puede tener es 3, porque sólo puede haber 3 vectores fila que sean linealmente independientes. La única fila que se puede añadir a la matriz de orden 2 es la 3ª, mientras que podemos añadir la 3ª ó 4ª columna, dando lugar a 2 submatrices de A:

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \text{ y } \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

Sus determinantes son

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2+0+0-0-1-4 = -7 \text{ y}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -1+0+3-0-2-2 = -2.$$

Ambos son distintos de 0, pero sería suficiente que uno de ellos lo fuera para afirmar que el rango de A es 3.

$\Rightarrow$ Es correcta la opción C.

6. El rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 & -2 & 1 \\ 0 & 2 & 0 & 1 & 3 & 2 \\ 1 & -1 & 1 & 0 & 1 & 3 \\ -1 & 2 & 1 & 1 & -2 & 4 \end{pmatrix}$ es: A) 4; B) 6; C) 3; D) Ninguna de las anteriores.

Para determinar el rango de una matriz es conveniente intentar detectar si hay filas o columnas que sean proporcionales o combinación lineal de otras, para prescindir de ellas en el cálculo. En este caso no es evidente, así que seguiremos el procedimiento estándar:

Buscar un elemento distinto de 0. Elegimos $a_{11} = 1$: el rango el mayor o igual que 1.

Ahora debemos buscar una submatriz cuadrada de orden 2, que contenga a a_{11}, y cuyo determinante sea distinto de $\Leftrightarrow$ las filas que intervienen son l.i., y las columnas que intervienen son l.i. $\Leftrightarrow$ el rango de la matriz que forman estos vectores es 2. Esta submatriz puede ser $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$.

¿Hay más vectores fila l.i.?.

Se trata de ver si el rango de la matriz formada al añadir la fila 3ª es 3. Una de las submatrices formadas con F_1, F_2, F_3 y C_1, C_2, C_3 es

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \end{pmatrix}$$

cuyo determinante es 0, es decir C_3 depende de C_1, C_2 (en realidad, $C_3 = C_1$). Si elegimos la matriz formada por F_1, F_2, F_3 y C_1, C_2, C_4, obtenemos

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = 0+0-0-4+1-0=-3\neq 0.$$

Luego el rango es mayor o igual que 3 $\Leftrightarrow$ F_1, F_2, F_3 son l.i. y también lo son C_1, C_2, C_4.

¿Es F_4 independiente de F_1, F_2, F_3?.

Es decir, si tiene rango 4 (que sería el máximo) la matriz, o el sistema de vectores que cuyas coordenadas son las filas. La única posibilidad para las filas es ampliar el determinante anterior con la cuarta fila; para las columnas podemos ampliar con la 5ª o la 6ª.

1ª posibilidad: F_1, F_2, F_3, F_4 con C_1, C_2, C_4, C_5:

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{pmatrix}.$$

Calculamos su determinante aplicando las transformaciones siguientes $F_3 \to F_3 - F_1$ y $F_4 \to F_4 + F_1$ y resulta:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 1 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & 2 & 1 & -2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 & -2 \\ 0 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -1 & -2 & 3 \\ 2 & 3 & -4 \end{vmatrix} = 3.$$

Como es distinto de 0, el rango de la matriz es 4 y la opción A es cierta.

7. El rango de la matriz $A=\begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & 2 \\ -1 & 1 & k & 0 \\ k & 2 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ es: A) 3 para $k=0$; B) No depende de k: C) 2 para $k=2$; D) Ninguna de las anteriores.

Como no es evidente que existan combinaciones lineales entre filas o columnas, procedemos a determinar el rango por la vía habitual.

Elegimos con rango 1 el menor de $a_{11}=1$. Ampliamos a una submatriz de orden 2, que es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$ (se comprueba sin más que calcular su determinante y ver que es distinto de 0).

Para ver si tiene rango 3, que es el máximo rango que puede tener: sólo se puede ampliar con la 3ª fila, pero podemos elegir la tercera columna:

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 1 \\ -1 & 1 & k \\ k & 2 & 0 \end{vmatrix} = 0+0-2-k-2k-0=-2-3k$$

o cuarta columna

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 2 \\ -1 & 1 & 0 \\ k & 2 & 2 \end{vmatrix} = 2+0-4-2k-0-0=-2-2k.$$

Tiene rango 3 si alguno (uno al menos) de los determinantes anteriores es distinto de 0, lo que ocurre si $k\neq\frac{-2}{3}$ ó $k\neq -1$. $\Rightarrow$ A es correcta y B, C y D son falsas.

8. Para formar una base con vectores de $\{\overline{u}=(1,2,-1),\overline{v}=(3,1,0),\overline{w}=(2,-1,1),\overline{s}=(2,1,0)\}$ basta: A) Eliminar $\overline{s}$; B) Eliminar $\overline{w}$; C) Nunca se podrá formar una base con ellos; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Una base en un espacio tridimensional está formada por 3 vectores libres.

⇒ El conjunto de vectores no puede ser base, porque son 4.

¿Matriz cuyas columnas son los vectores?.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 3 & 2 & 2\\ 2 & 1 & -1 & 1\\ -1 & 0 & 1 & 0\end{pmatrix}.$$

El máximo número de vectores libres en $\mathbb{R}^3$ es 3 ⇒ El rango máximo que puede tener A es 3.

¿Son independientes $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{w}$?.

Las tres primeras columnas corresponden a estos vectores, el determinante de la submatriz es:

$$\begin{vmatrix}1 & 3 & 2\\ 2 & 1 & -1\\ -1 & 0 & 1\end{vmatrix}=1+3+0+2-0-6=0.$$

Como es 0, el sistema formado por $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{w}$ no es libre y A no es cierta, porque una base debe estar formada por vectores libres.

¿Son independientes $\overline{u}$, $\overline{v}$ y $\overline{s}$?.

Es decir, ¿es la opción B cierta? Las columnas correspondientes a estos vectores son las dos primeras y la última. Tenemos:

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{pmatrix} = 3 \text{ porque } \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 2 & 1 & 1 \\ -1 & 0 & 0 \end{vmatrix} = -3+2 = -1 \neq 0.$$

Entonces rg $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{s}\} = 3 = \dim \mathbb{R}^3$ $\{\vec{u}, \vec{v}, \vec{s}\} \Leftrightarrow$ son base de $\mathbb{R}^3 \Rightarrow$ B es correcta.

9. El endomorfismo $f(x, y, z) = (3x + y + z, x + y, -2y + z)$ de $\mathbb{R}^3$ tiene rango:
A) 1: B) 2; C) 3; D) Ninguna de las anteriores.

❖ El rango de un endomorfismo es el rango de la matriz asociada.

¿Matriz asociada a la base canónica?.

Como $f(1, 0, 0) = (3, 1, 0), f(0, 1, 0) = (1, 1, -2), f(0, 0, 1) = (1, 0, 1)$ resulta:

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}.$$

Calculamos su rango, estudiando primero si es 3:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} = 3-2+0-0-0-1 = 0.$$

Como el determinante es 0, el rango no puede ser 3. Miraremos si es 2, eligiendo la submatriz formada por las 2 primeras filas y columnas:

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 3-1 = 2 \neq 0.$$

Como es distinto de 0, el rango es 2 $\Rightarrow$ Es correcta la opción B.

10. La dimensión de la imagen del endomorfismo de $\mathbb{R}^3$ $f(x, y, z) = (x - y,$ $x + ky, y + z)$ es 2 si: A) $k = 1$; B) $k = 2$; C) $k = -1$; D) Ninguna de las anteriores.

¿Matriz asociada al endomorfismo?.

$$f(1,0,0) = (1,1,0),\ f(0,1,0) = (0,k,1),\ f(0,0,1) = (-1,0,1)$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}.$$

¿Rango de A?.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & k & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = k - 1 + 0 - 0 - 0 - 0 = k - 1.$$

Este determinante vale 0 si $k = 1$, y entonces el rango no es 3.

Comprobemos si con este valor, $k = 1$, el rango es 2:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & k \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = 1 \neq 0.$$

Observamos que con este valor de k el rango sí es 2. Es correcta la respuesta A.

❖ Dimensión de la imagen de f = Rango de f = Rango A

⇒ Es correcta A.

11. La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}$: A) Tiene rango 3; B) Tiene inversa y es de rango 3; C) Su determinante es negativo, luego no tiene inversa; D) Ninguna de las anteriores.

Las opciones son relativas al rango de la matriz y a si la matriz es invertible. La herramienta más adecuada son los determinantes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{vmatrix} = -2-2+1-1+1+4 = 1.$$

Como es distinto de 0, la matriz es invertible y tiene rango 3. Son correctas A y B.

C es falsa porque si una matriz tiene determinante negativo, es distinto de 0, y por tanto es invertible.

12. Si A es una matriz asociada a un endomorfismo f tal que $\det(A) = r$, con $r \neq 0$ y hacemos un cambio de base tal que la matriz asociada es A', entonces $\det(A')$ verifica: A) No se puede determinar; B) Vale $1/r$; C) Vale r; D) Es distinto del $\det(A)$.

Si A' resulta de hacer un cambio de base en A entonces, si B es la matriz de cambio de base se cumple que:

$$A' = BAB^{-1}.$$

Aplicando las propiedades de los determinantes se cumple que $|A'| = |BAB^{-1}| = |B|\,|A|\,|B^{-1}|$ y como $|B|\,|B|^{-1} = 1$ resulta que $\det(A') = \det(A) = r \Rightarrow$ C es cierta.

CAPÍTULO 4

SISTEMAS DE ECUACIONES LINEALES

Ejercicios relativos a:

"Sistemas de ecuaciones lineales: Definiciones, expresión matricial, relación con las aplicaciones lineales, sistemas homogéneos asociados."

1. De entre los siguientes sistemas de ecuaciones no son lineales:

A) $x_1 + x_2 + 2x_3 = x_4$; B) $x_1 + x_2 + x_3 = 0; x_1^2 + 2x_2 = x_3$;

C) $x_2 x_1 + x_3 = 0$; $x_1 + 2x_3 = 3$; D) $x_1 = 3$; $x_2 = 0$.

❖ Un sistema de m ecuaciones lineales con n incógnitas es todo conjunto de ecuaciones de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \qquad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

siendo x_j las incógnitas, $a_{ij} \in \mathbb{R}$ los coeficientes de las incógnitas y $b_i \in \mathbb{R}$ los términos independientes, para $j = 1, \ldots, m$, $i = 1, \ldots, n$.

❖ Cuando todos los términos independientes b_1, ..., b_m son cero, el sistema se llama homogéneo y en caso contrario se llama no homogéneo.

⇒ A y D sí son sistemas de ecuaciones lineales, sin embargo B y C no lo son porque aparecen monomios de grado 2: x_1^2 en B y x_2x_1 en C.

2. Se invierten 6000 € en 3 fondos de inversión: en el primero invertimos una cantidad x, en el segundo y y en el tercero z. La evolución de estos fondos hace que la inversión en el primer fondo sea igual que en los otros dos juntos, y que en el segundo invirtamos el doble que en el tercero. Al modelizar mediante ecuaciones esta situación, es cierto que: A) Tenemos 4 ecuaciones y 3 incógnitas; B) $y - 2z = 0$ es un ecuación del sistema; C) No es un sistema de ecuaciones lineales; D) Ninguna de las anteriores.

En cualquier sistema de ecuaciones, las incógnitas son los distintos parámetros que intervienen y cuyo valor, generalmente, queremos determinar. En este caso, invertimos dinero en 3 fondos y cuánto invertimos en cada uno es la cantidad buscada. Luego vamos a tener 3 incógnitas.

Las condiciones que debemos aplicar van a proporcionar el número de ecuaciones, ya que cada condición es una ecuación.

Condición	Expresión algebraica
Invertimos 6000 € en 3 fondos: en el primero invertimos una cantidad x, en el segundo y y en el tercero z	$x + y + z = 6000$
Invertimos lo mismo en el primer fondo que en los otros dos juntos	$x = y + z \Leftrightarrow x - y - z = 0$
En el segundo invertimos el doble que en el tercero	$y = 2z \Leftrightarrow y - 2z = 0$

Tenemos 3 ecuaciones y 3 incógnitas $\Rightarrow$ A no es correcta.

La tercera condición evidencia que B sí es correcta.

Las ecuaciones son lineales $\Rightarrow$ C es falsa.

3. La expresión matricial del sistema de ecuaciones del ejercicio anterior es:

A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 1 \\ 1 & -1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ v \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 6000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$;

C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 6000 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ -2 \end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ La expresión matricial de un sistema de n incógnitas y m ecuaciones es:

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b_1 \\ \vdots \\ b_m \end{pmatrix} \Leftrightarrow AX = B.$$

siendo A una matriz de orden $m \times n$ denominada matriz de los coeficientes, B una matriz columna de orden m que es la matriz de los términos independientes y X una matriz columna de orden n llamada matriz de las incógnitas.

El sistema de ecuaciones del ejercicio anterior es

$$\begin{cases} x+y+z=6000 \\ x-y-z=0 \\ \quad y-2z=0 \end{cases}$$

cuya expresión matricial es

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 6000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ Es correcta la opción B.

4. En la expresión matricial del sistema del ejercicio 2, es cierto que: A) $\begin{pmatrix} 6000 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es la matriz de los coeficientes; B) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -2 \end{pmatrix}$ es la matriz de los coeficientes; C) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 & 6000 \\ 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & -2 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz ampliada; D) Ninguna de las anteriores.

Comparando con la definición dada en el ejercicio anterior, es evidente que es correcta la opción B, y que A es falsa.

❖ La matriz ampliada está formada por la matriz de los coeficientes a la que se ha añadido una nueva columna al final, que es la matriz de los términos independientes.

$\Rightarrow$ C es una respuesta correcta.

5. Una empresa de asesoría fiscal dispone de 3 sistemas informáticos instalados cada uno en varios ordenadores de la empresa. En una hora, si trabaja un ordenador con cada sistema simultáneamente, se realiza la declaración de la renta de 600 personas. Si trabajan 2 ordenadores con el primer sistema y 2 con

el segundo en 1 hora hacen la declaración de 800 personas. Y si trabaja 1 ordenador con el primer sistema y 3 con el tercero, calculan la declaración de 700 personas en el mismo tiempo. La expresión algebraica de estas condiciones da lugar a: A) Un sistema lineal de ecuaciones no homogéneo; B) Un sistema no lineal; C) Un sistema lineal de ecuaciones homogéneo; D) Ninguna de las anteriores.

La situación que describe el enunciado es referente a 3 sistemas informáticos que realizan un número determinado de Declaraciones de la Renta en 1 hora. Parece lógico elegir 3 variables, x, y, y z que representan el número de declaraciones que hace un ordenador con cada sistema en este tiempo. Las condiciones dadas se pueden expresar en lenguaje algebraico como:

Condición	Expresión algebraica
Trabajando un ordenador con cada sistema simultáneamente, se hacen 600 declaraciones	$x + y + z = 600$
Trabajando 2 ordenadores con el primer sistema y 2 con el segundo en 1 hora hacen 800 declaraciones	$2x + 2y = 800$
Trabajando 1 ordenador con el primer sistema y 3 con el tercero se hacen 700 declaraciones	$x + 3z = 700$

El sistema resultante es:

$$\begin{cases} x + y + z = 600 \\ x + 3z = 700 \\ 2x + 2y = 800 \end{cases}$$

que es lineal y no homogéneo.

$\Rightarrow$ Sólo es correcta A.

6. En la expresión matricial de las ecuaciones del ejercicio anterior: A) $(600 \quad 700 \quad 800)'$ es la matriz de los coeficientes; B) $(600 \quad 700 \quad 800)'$ es la matriz de los términos independientes; C) $(600 \quad 700 \quad 800)'$ es la matriz de las incógnitas; D) Ninguna de las anteriores.

La expresión matricial del problema anterior es $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 600 \\ 700 \\ 800 \end{pmatrix}$

donde $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 3 \\ 2 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ es la matriz de los coeficientes, $\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 1 & 0 & 3 & 700 \\ 2 & 2 & 0 & 800 \end{array}\right)$ es la matriz ampliada, $\begin{pmatrix} x & y & z \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ es la matriz de las incógnitas y

$\begin{pmatrix} 600 & 700 & 800 \end{pmatrix}' = \begin{pmatrix} 600 \\ 700 \\ 800 \end{pmatrix}$ es la matriz de los términos independientes.

$\Rightarrow$ Es correcta B.

7. De entre los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son homogéneos: A) $x_1 - 3 = 0$; $x_2 = 0$; $x_1 + x_2 + 2x_3 = x_4$; B) $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = x_2$; C) $x_1 = 3$; $x_2 = 2$; D) Todos los anteriores son homogéneos.

❖ Un sistema de ecuaciones lineales es homogéneo cuando todos los términos independientes $b_1, \ldots, b_m$ son cero. En caso contrario se llama no homogéneo.

Por tanto, como el sistema de la opción A es equivalente a $x_1 = 3$; $x_2 = 0$; $x_1 + x_2 + 2x_3 - x_4 = 0$ no es homogéneo. Tampoco lo es el sistema de C: $x_1 = 3$; $x_2 = 2$.

El sistema $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 = x_2$ es equivalente a $x_1 = 0$; $x_2 = 0$; $x_3 - x_2 = 0$ y por tanto es homogéneo $\Rightarrow$ B es cierta.

8. Si $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ es solución de un sistema de ecuaciones lineales se verifica: A) El sistema de ecuaciones está formado por 3 ecuaciones; B) El sistema de ecuaciones tiene tres incógnitas; C) El sistema de ecuaciones para el cual la terna dada $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ es solución es único salvo sistemas equivalentes; D) No se puede saber cuántas ecuaciones determinan el sistema.

❖ Se llama solución del sistema $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \ldots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \ldots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \quad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \ldots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$ a toda n-nupla

$(\alpha_1, \ldots, \alpha_n)$ de elementos de $\mathbb{R}$, tales que sustituidos en $(x_1, \ldots, x_n)$, se verifican todas las ecuaciones del sistema.

❖ Dos sistemas de ecuaciones son equivalentes si poseen las mismas soluciones.

La opción B es cierta porque el número de elementos de la solución coincide con el número de incógnitas del sistema. Sin embargo, no se puede determinar el número de ecuaciones que forman el sistema $\Rightarrow$ D es cierta y A es falsa.

La opción C es falsa, ya que puede suceder que existan varios sistemas de ecuaciones distintos que tengan una solución común, por ejemplo la terna (2, 1, 3) es solución del sistema: $\begin{cases} 5x_1 - 3x_2 + x_3 = 10 \\ x_1 = 2 \end{cases}$ y del sistema $\begin{cases} x_1 - x_2 = 1 \\ x_3 = 3 \end{cases}$. Esto es porque, aunque los sistemas equivalentes son los que tienen las mismas solu-

ciones, en este caso estamos ante 2 sistemas con infinitas soluciones cada uno, y con una solución común.

Las soluciones del primer sistema son los puntos que verifican $x_1 = 2$, $x_3 = 3x_2$, es decir, las ternas que verifican $(2, \lambda, 3\lambda)$. Las soluciones del segundo son las ternas que verifican $x_1 = 1 + x_2$, $x_3 = 3$, es decir, $(1 + \mu, \mu, 3)$. La solución es común cuando $\lambda = \mu = 1$.

9. Si $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ y $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$ son soluciones del sistema de ecuaciones lineales $\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + a_{13}x_3 = 0 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + a_{23}x_3 = 0 \\ \vdots \qquad\quad \vdots \qquad\quad \vdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + a_{m3}x_3 = 0 \end{cases}$ siempre se verifica: A) $(2\alpha_1, 2\alpha_2, 2\alpha_3)$ es solución del sistema; B) $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)$ es solución del sistema: C) (0, 0, 0) es solución del sistema; D) Todas las anteriores son falsas.

❖ En el sistema anterior hay m ecuaciones y 3 incógnitas, x_1, x_2, x_3. Las soluciones son ternas de números tales que al sustituirlas por (x_1, x_2, x_3) convierten en identidades todas las ecuaciones del sistema.

¿Es $(2\alpha_1, 2\alpha_2, 2\alpha_3)$ *solución?.*

Si en lugar de (x_1, x_2, x_3) se pone $(2\alpha_1, 2\alpha_2, 2\alpha_3)$ y denotamos A la matriz de coeficientes resulta:

$$A\begin{pmatrix} 2\alpha_1 \\ 2\alpha_2 \\ 2\alpha_3 \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \\ \alpha_3 \end{pmatrix} 2 = 0.$$

$\Rightarrow$ A es cierta.

¿Es $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)$ *solución?.*

Si en lugar de (x_1, x_2, x_3) se pone $(\alpha_1 + \beta_1, \alpha_2 + \beta_2, \alpha_3 + \beta_3)$ resulta:

$$A\begin{pmatrix}\alpha_1+\beta_1\\ \alpha_2+\beta_2\\ \alpha_3+\beta_3\end{pmatrix}=A\begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix}+A\begin{pmatrix}\beta_1\\ \beta_2\\ \beta_3\end{pmatrix}=0+0$$

$\Rightarrow$ B también es cierta.

¿Es (0, 0, 0) *solución?.*

❖ En un sistema homogéneo de n incógnitas siempre la n-upla (0, 0, .., 0) es solución.

$\Rightarrow$ C es cierta.

10. De entre los siguientes sistemas de ecuaciones lineales son equivalentes al sistema $\begin{cases}x_1-3x_2+x_3=0\\ x_2=0\end{cases}$: A) $x_1+x_3=0$; B) $x_2=0$; C) $2x_1-6x_2+2x_3=0$; $2x_2=0$; D) $x_1-2x_2+x_3=0$; $x_2=0$; E) $x_1-2x_2+x_3=0$; $x_2=0$; $x_1-3x_2+x_3=0$.

¿El sistema $x_1+x_3=0$ *es equivalente al sistema dado?.*

Si fueran equivalentes tendrían las mismas soluciones, es decir, toda solución del primer sistema sería solución del segundo y viceversa. Esto no es cierto porque la terna (1, 2, –1) es solución del primer sistema pero no del segundo.

$\Rightarrow$ A es falsa.

¿El sistema $x_2=0$ *es equivalente al sistema dado?.*

Toda solución del sistema $\begin{cases}x_1-3x_2+x_3=0\\ x_2=0\end{cases}$ es solución del sistema $x_2 = 0$ pero esto no sucede al revés.

$\Rightarrow$ B es falsa.

¿El sistema $2x_1 - 6x_2 + 2x_3 = 0;\ 2x_2 = 0$ *es equivalente al sistema dado?.*

Las ecuaciones son las mismas pero están multiplicadas por la constante 2.

$\Rightarrow$ C es cierta.

¿El sistema $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0;\ x_2 = 0$ *es equivalente al sistema dado?.*

Sí, porque la primera ecuación de $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0;\ x_2 = 0$ es suma de las ecuaciones del sistema original, y la segunda ecuación es la misma.

$\Rightarrow$ D es cierta.

¿El sistema $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0;\ x_2 = 0;\ x_1 - 3x_2 + x_3 = 0$ *es equivalente al sistema dado?.*

$x_1 - 3x_2 + x_3 = 0;\ x_2 = 0;\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$ es equivalente al sistema original, ya que si se cumplen las dos primeras sobra $x_1 - 2x_2 + x_3 = 0$, que es la suma de las 2 anteriores.

$\Rightarrow$ E es cierta.

11. Si el sistema de ecuaciones $3x_1 + x_2 + x_3 = 2;\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1;\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1;\ 6x_1 - x_2 + x_3 = 3$ es la expresión analítica de una aplicación lineal $f: V \to W$, entonces: A) V es un espacio vectorial de dimensión 4; B) W es un espacio vectorial de dimensión 3; C) V y W tienen la misma dimensión; D) Ninguna de las anteriores.

❖ El sistema $AX = B$ de m ecuaciones y n incógnitas es la expresión analítica de una aplicación lineal $f: V \to W$, siendo V un espacio vectorial de dimensión n y W un espacio vectorial de dimensión m.

Si expresamos el sistema de ecuaciones en forma matricial resulta:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 + x_3 = 2 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 1 \\ 3x_1 - x_2 - x_3 = 1 \\ 6x_1 - x_2 + x_3 = 3 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 1 \\ 3 \end{pmatrix}.$$

Luego V es un espacio vectorial de dimensión 3 y W es un espacio vectorial de dimensión 4 $\Rightarrow$ D es cierta.

❖ Cada columna de la matriz A es la imagen de un vector de una base de V, expresada en una base de W. Está claro que cada base de V tiene 3 vectores (3 columnas), luego su dimensión es 3, y los elementos de W tienen 4 coordenadas, es decir, su dimensión es 4.

12. Si la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$ está definida en las bases canónicas por $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 + x_3)$, entonces el original del vector (1, 1): A) Es único; B) No es único; C) No existe; D) Ninguna de las anteriores.

¿Expresión de f mediante un sistema de ecuaciones lineales?.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = y_1 \\ x_1 + \quad\quad x_3 = y_2 \end{cases}$$

¿Expresión matricial del sistema anterior?.

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

¿Original de (1, 1)*?.*

Es el conjunto de vectores (x_1, x_2, x_3) cuya imagen es (1, 1), es decir, son las soluciones del sistema, $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 1 \\ x_1 + \quad\quad x_3 = 1 \end{cases}$. Un sistema equivalente es $\begin{cases} 2x_1 + x_2 = 1 + x_3 \\ x_1 \quad\quad = 1 - x_3 \end{cases}$. En este sistema se ve claro que para cada valor de x_3 hay un valor diferente de x_1 y de x_2. La solución no es única porque (1, –1, 0) y (4, 2, 1) tienen como imagen (1, 1) $\Rightarrow$ La opción correcta es B.

❖ Si $f: V \to W$ es la aplicación lineal definida por el sistema de ecuaciones $AX = Y$ entonces, el conjunto de soluciones del sistema $AX = B$ es el conjunto de los originales del vector $B \in W$ vía la aplicación lineal f.

13. El núcleo de la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$, definida en las bases canónicas, por $f(x_1, x_2, x_3) = (x_2 - 3x_3, x_1 + x_3, x_1)$ es: A) $\{(0, 0, 0)\}$; B) Un subespacio de dimensión 1; C) Un subespacio de dimensión 2.

¿Expresión de la aplicación lineal como un sistema de ecuaciones lineales?.

$$\begin{cases} x_2 - 3x_3 = y_1 \\ x_1 + x_3 = y_2 \\ x_1 = y_3 \end{cases}$$

❖ Si $f: V \to W$ es la aplicación lineal definida por el sistema de ecuaciones $AX = Y$ entonces, el Nuc (f) de la aplicación lineal f es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $AX = 0$.

Los vectores que forman el núcleo de la aplicación lineal f son las soluciones del sistema homogéneo:

$$\begin{cases} x_2 - 3x_3 = 0 \\ x_1 + x_3 = 0 \\ x_1 = 0 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Es cierta A.

La única solución es (0, 0, 0).

Como Dim$\{(0, 0, 0)\} = 0 \Rightarrow$ B y C con falsas.

14. El núcleo de la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, definida en las bases canónicas, por $f(x_1, x_2, x_3) = (2x_1 + x_2 - x_3, x_1 - 2x_2 + x_3)$ es: A) $\{(0, 0, 0)\}$; B) Un subespacio de dimensión 1; C) Un subespacio de dimensión 2.

¿Expresión de la aplicación lineal mediante un sistema de ecuaciones lineales?.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = y_1 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = y_2 \end{cases}.$$

¿Cuál es Nuc (f)*?.*

Nuc $(f) = \{(x_1, x_2, x_3) \mid f(x_1, x_2, x_3) = (0, 0)\}$, es decir, es el conjunto de soluciones del sistema homogéneo $\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases}$.

¿Ecuaciones paramétricas del núcleo?.

$$\begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_3 = -x_1 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 2x_1 + x_2 + x_1 - 2x_2 = 0 \\ x_3 = -x_1 + 2x_2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 = 3x_1 \\ x_3 = 5x_1 \end{cases}$$

Los valores de x_2 y x_3 dependen del valor de x_1, y unas ecuaciones paramétricas del sistema son:

$$\begin{cases} x_1 = \lambda \\ x_2 = 3\lambda \\ x_3 = 5\lambda \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Nuc $(f) = \{(\lambda, 3\lambda, 5\lambda) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \langle (1, 3, 5) \rangle$ y sólo es cierta la opción B, porque las 3 soluciones dependen sólo de un parámetro.

15. Sea $AX = B$ un sistema de ecuaciones lineales y (1, 2, 3) una solución particular de dicho sistema. Si el conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado $AX = 0$ es $\{(2\lambda, \lambda, 0) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$, es cierto que es solución del sistema $AX = B$: A) (1, 0, 3); B) (5, 4, 3); C) (1, 2, 4); D) Ninguna de las anteriores.

❖ Dada una solución particular de un sistema no homogéneo y las soluciones del sistema homogéneo asociado, se verifica que el conjunto de soluciones del sistema no homogéneo es igual al conjunto de soluciones del sistema homogéneo asociado más una solución particular del no homogéneo.

Por tanto, el conjunto de soluciones del sistema $AX = B$ es igual al conjunto

$$\{(x_1, x_2, x_3)\} = \{(2\lambda, \lambda, 0) + (1,2,3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\} = \{(2\lambda + 1, \lambda + 2, 3) \mid \lambda \in \mathbb{R}\}$$

La opción C es falsa porque todas las soluciones del sistema no homogéneo cumplen que $x_3 = 3$ y en (1,2,4), es $x_3 = 4$.

¿Es (1, 0, 3) *solución del sistema?.*

Para ver si (1, 0, 3) es solución del sistema $AX = B$, basta comprobar si existe un valor de λ para el que (1, 0, 3) = (2λ + 1, λ + 2, 3). Tenemos

$\begin{cases} 1 = 2\lambda + 1 \\ 0 = \lambda + 2 \\ 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 2\lambda = 0 \\ \lambda = -2 \end{cases}$, como λ no puede ser simultáneamente 0 y 2, entonces (1, 0, 3) no es solución del sistema $\Rightarrow$ A es falsa.

¿Es (5, 4, 3) *solución del sistema?.*

Como en el caso anterior, tenemos que ver si existe valor de λ para el que $(5, 4, 3) = (2\lambda + 1, \lambda + 2, 3)$. Obtenemos el sistema

$$\begin{cases} 5 = 2\lambda + 1 \\ 4 = \lambda + 2 \\ 3 = 3 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 4 = 2\lambda \\ 2 = \lambda \end{cases} \Rightarrow \lambda = 2.$$

$\Rightarrow$ B es cierta.

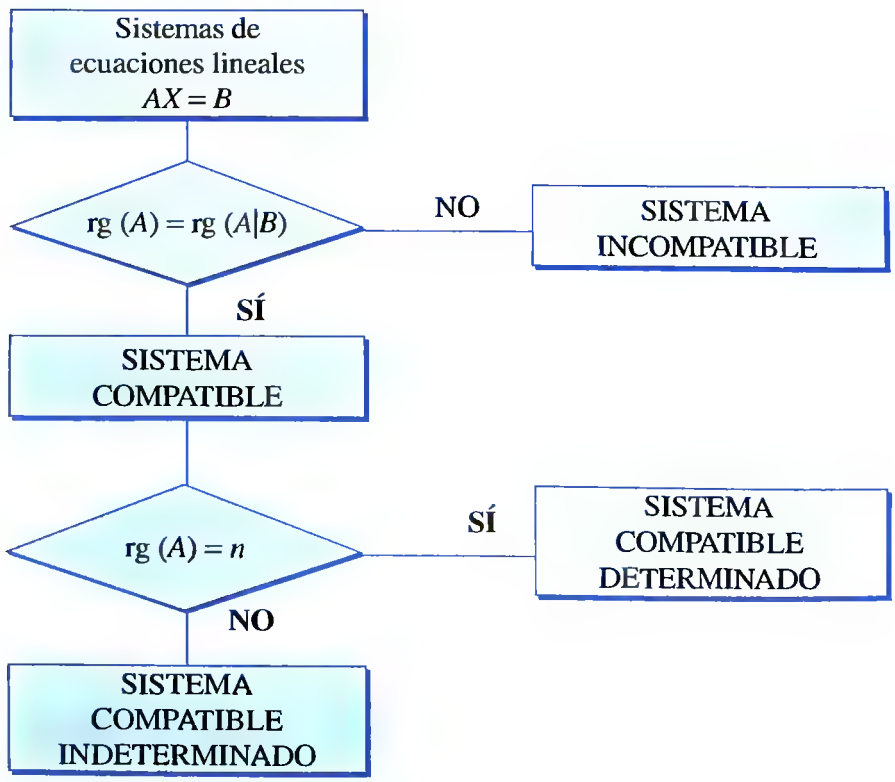
Ejercicios relativos a:

"Clasificación de sistemas de ecuaciones lineales."

Clasificación de los sistemas de ecuaciones lineales

❖ El Teorema de Rouché-Frobenius para clasificar sistemas de ecuaciones lineales se puede expresar mediante el organigrama siguiente:

Sea $AX = B$ un sistema de n ecuaciones con m incógnitas. Denotaremos $A|B$ la matriz A ampliada con la columna B.



1. El sistema de ecuaciones $2x + 3y - z = 2$; $x + 2z = 0$; $5x + 4y = 0$ es: A) Compatible determinado; B) Incompatible; C) Compatible indeterminado; D) Ninguna de las anteriores.

Para clasificar un sistema de ecuaciones seguiremos el esquema anterior.

¿Cuál es la expresión matricial del sistema?.

La matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}$ y la matriz de los términos independientes es $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$. La matriz ampliada, $\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 2 \\ 1 & 0 & 2 & 0 \\ 5 & 4 & 0 & 0 \end{array}\right)$, es la matriz de los coeficientes junto con la matriz de los términos independientes.

El sistema a clasificar es $\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

¿Es el Rango de A = Rango de A|B?.

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \\ 5 & 4 & 0 \end{vmatrix} = 10 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = 3.$$

Como $A|B$ sólo tiene 3 filas, el máximo rango que puede tener es 3. Además este rango es 3, porque un menor suyo (el correspondiente a la matriz A) es distinto de $0 \Rightarrow \operatorname{rg}(A) = \operatorname{rg}(A|B) = 3 \Rightarrow$ por el teorema de Rouché-Frobenius el sistema es compatible $\Rightarrow$ B es falsa.

¿Es el Rango de A = Número de incógnitas?.

El número de incógnitas es $3 \Rightarrow$ El sistema es compatible determinado $\Rightarrow$ A es cierta y C es falsa.

2. El sistema $2x_1 + 3x_2 - x_3 - x_4 = 3;\ x_1 - x_2 + 5x_3 = 5;\ 3x_1 + 2x_2 + 4x_3 - x_4 = 0$ verifica: A) Es incompatible; B) Es no homogéneo; C) Tiene una única solución; D) Tiene infinitas soluciones.

¿Expresión matricial del sistema?.

$$\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 \\ 5 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ La opción B es cierta porque el vector de los términos independientes no está formado sólo por ceros.

¿Es el Rango de A = Rango de A|B?.

$$\text{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 \\ 1 & -1 & 5 & 0 \\ 3 & 2 & 4 & -1 \end{pmatrix} = 2 \text{ y } \text{rg}\begin{pmatrix} 2 & 3 & -1 & -1 & 3 \\ 1 & -1 & 5 & 0 & 5 \\ 3 & 2 & 4 & -1 & 0 \end{pmatrix} = 3.$$

El rango de la primera matriz es 2, porque cualquier submatriz de orden 3 tiene determinante igual a 0, lo que se comprueba fácilmente y hay menores de orden 2 no nulos. El rango de la segunda matriz es 3 porque la submatriz $\begin{pmatrix} 2 & 3 & 3 \\ 1 & -1 & 5 \\ 3 & 2 & 0 \end{pmatrix}$ tiene determinante distinto de 0.

$\Rightarrow$ No existe solución para el sistema, por tanto es incompatible y A es cierta.

3. El sistema $3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 2;\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 3;\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 2$: A) Es compatible; B) Es incompatible; C) Tiene una única solución; D) Tiene infinitas soluciones.

¿Matriz de coeficientes?.

$$A=\begin{pmatrix}3 & 1 & -2 & 1\\ 1 & -2 & -3 & -1\\ 1 & 1 & -2 & -1\end{pmatrix}.$$

¿Es el Rango de A = Rango de A|B?.

La matriz de los términos independientes $B=\begin{pmatrix}2\\3\\2\end{pmatrix}$, obsérvese que es el vector opuesto al formado por la tercera columna de la matriz A, luego $\text{rg}\,(A)=\text{rg}\,(A|B)$.

$\Rightarrow$ El sistema es compatible, es decir, tiene solución, y la opción A es correcta.

¿Es el Rango de A = Número de incógnitas?.

$$\begin{vmatrix}3 & 1 & -2\\ 1 & -2 & -3\\ 1 & 1 & -2\end{vmatrix}\neq 0\Rightarrow \text{rg}\,(A)=\text{rg}\,(A|B)=3.$$

El número de incógnitas es 4 y por tanto $\text{rg}\,(A)=\text{rg}\,(A|B)=3<4\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado, es decir, con infinitas soluciones y D es cierta.

4. Consideramos el sistema homogéneo asociado al sistema de ecuaciones del ejercicio anterior y la ecuación $4x_1+5x_2+x_3-3x_4=0$. Entonces, el sistema de ecuaciones resultante es: A) Homogéneo; B) Incompatible; C) Tiene una única solución; D) Tiene alguna solución distinta de la trivial.

¿Es homogéneo?.

El sistema de ecuaciones considerado es:

$$\begin{cases} 3x_1 + x_2 - 2x_3 + x_4 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ x_1 + x_2 - 2x_3 - x_4 = 0 \\ 4x_1 + 5x_2 + x_3 - 3x_4 = 0 \end{cases}$$

Todos los términos independientes son 0 ⇒ Es un sistema homogéneo y A es cierta.

La opción B es falsa porque:

❖ Todos los sistemas homogéneos son compatibles ya que la *n*-upla (siendo *n* el número de incógnitas) formada por ceros es solución y se llama solución trivial.

El rango de la nueva matriz de coeficientes es mayor o igual que 3, ya que se forma añadiendo una fila a la matriz estudiada en el ejercicio anterior, cuyo rango es 3. En este caso observamos que:

$$\text{rg}(A) = \text{rg}\begin{pmatrix} 3 & 1 & -2 & 1 \\ 1 & -2 & -3 & -1 \\ 1 & 1 & -2 & -1 \\ 4 & 5 & 1 & -3 \end{pmatrix} = 4.$$

Por tanto el sistema es compatible determinado, sólo tiene una solución y es la solución trivial ⇒ C es cierta.

5. El sistema $2y - z = a$; $3x - 2z = 11$; $y + z = 6$; $2x + y - 4z = a$ es compatible para: A) $a = 2$; B) $a \neq 2$; C) $a = 6$; D) Cualquier valor de a.

❖ La condición necesaria y suficiente para que un sistema $AX = B$ sea compatible es que el rango de la matriz de los coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada por la columna de términos independientes, es decir, rg (A) = rg $(A|B)$.

¿Matriz ampliada?.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 0 & 2 & -1 & a \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & a \end{array}\right).$$

El sistema dado tiene 4 ecuaciones y 3 incógnitas; además el parámetro a sólo aparece en la columna de los términos independientes y por tanto sólo influye en la matriz ampliada.

El rango de la matriz de los coeficientes es 3 porque el primer menor de orden 3 (formado por las tres columnas y tres filas primeras) vale $\begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 3 & 0 & -2 \\ 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -9 \neq 0$.

No puede tener un rango mayor, porque sólo tiene 3 columnas.

Entonces, para que el sistema sea compatible debe ser rg (A) = rg $(A|B)$ = 3.

Para que $\operatorname{rg}\begin{pmatrix} 0 & 2 & -1 & a \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & a \end{pmatrix} = 3$, $\det(A|B) = 0$.

$$\text{Como } \det(A|B) = \begin{vmatrix} 0 & 2 & -1 & a \\ 3 & 0 & -2 & 11 \\ 0 & 1 & 1 & 6 \\ 2 & 1 & -4 & a \end{vmatrix} = -3\begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ 1 & 1 & 6 \\ 1 & -4 & a \end{vmatrix} - 2\begin{vmatrix} 2 & -1 & a \\ 0 & -2 & 11 \\ 1 & 1 & 6 \end{vmatrix} = -12 + 2a.$$

debe ser $a = 6$ para que rg (A) = rg $(A|B) = 3 \Rightarrow$ Sólo C es cierta.

6. Para que el sistema $ax+y+z=1; x+ay+z=1; x+y+az=1$ tenga una única solución debe ser: A) $a\neq 1$; B) $a\neq -2$; C) $a\neq 1$ ó $a\neq -2$; D) $a\neq 1$ y $a\neq -2$.

❖ Un sistema de ecuaciones $AX=B$ tiene una única solución cuando el sistema es compatible determinado.

Por tanto, hay que buscar los valores de a para los que se cumple:

1. rg (A) = rg $(A|B)$ (sistema compatible)
2. rg (A) = rg $(A|B)$ = 3 (sistema compatible determinado)

En nuestro caso, las dos condiciones anteriores son equivalentes a la condición:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} \neq 0.$$

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = a^3+1+1-a-a-a = a^3-3a+2 = (a-1)^2(a+2).$$

El determinante de la matriz de los coeficientes es distinto de 0 si $a\neq 1$ y $a\neq -2$. En este caso, tenemos rg (A) = rg $(A|B)$ = 3 = Número de incógnitas $\Rightarrow$ D es cierta.

7. Para que el sistema del ejercicio anterior no tenga solución debe ser: A) $a\neq 1$; B) $a\neq -2$; C) $a=-2$; D) $a\neq 1$ y $a\neq -2$.

❖ Un sistema de ecuaciones $AX=B$ no tiene solución cuando el sistema es incompatible, es decir, si rg $(A)\neq$ rg $(A|B)$.

¿Cuándo es rg $(A)\neq$ rg $(A|B)$*?*.

Según los valores del parámetro a, puede ser:

1. rg $(A) = 1$ y rg $(A|B) = 2$
2. rg $(A) = 1$ y rg $(A|B) = 3$
3. rg $(A) = 2$ y rg $(A|B) = 2$

¿Son posibles los casos 1 y 2?.

Los casos 1 y 2 no pueden suceder para ningún valor de a, ya que rg $(A) = 1$ si y sólo si $a = 1$ y en este caso, siempre rg $(A) =$ rg $(A|B) = 1$ porque la columna de términos independientes está formada por unos.

¿Para qué valores de a puede suceder el caso 3?.

Si rg $(A) = 2$ entonces $|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0$, que sucede, como hemos visto en el ejercicio anterior, cuando $a = -2$ ó $a = 1$.

Si $a = 1$, ya lo hemos analizado en el apartado anterior.

Si $a = -2$, $\text{rg}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix} = 2$. La única posibilidad para que el sistema sea incompatible es que $\text{rg}(A|B) = \text{rg}\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 1 \end{pmatrix} = 3$. Esto es cierto porque el menor obtenido al sustituir la tercera columna por la de los términos independientes es distinto de 0:

$$\begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(-2) + 1 + 1 + 2 + 2 - 1 = 9.$$

$\Rightarrow$ Si $a = -2$, rg $(A) = 2 \neq$ rg $(A|B) = 3$ y la opción C es cierta.

8. Para que el sistema del ejercicio 6 tenga infinitas soluciones, debe ser: A) $a = 1$; B) $a \neq -2$; C) $a = -2$; D) $a \neq 1$ y $a \neq -2$.

❖ Un sistema de ecuaciones $AX = B$ tiene infinitas soluciones cuando es compatible indeterminado, es decir, cuando rg $(A) =$ rg $(A|B) <$ número de incógnitas.

¿Cuándo es rg $(A) =$ rg $(A|B) < n$*?.*

1. rg $(A) =$ rg $(A|B) = 1$.
2. rg $(A) =$ rg $(A|B) = 2$.

¿Qué valores puede tener a para que se cumpla rg $(A) =$ rg $(A|B) = 1$*?.*

Como ya hemos visto en el ejercicio anterior, rg $(A) = 1$ cuando $a = 1$. El sistema se reduce a la ecuación $x + y + z = 1$ y sus soluciones son $x = \alpha$, $y = \beta$ y $z = 1 - \alpha - \beta$.

¿Qué valores puede tener a para que se cumpla rg $(A) =$ rg $(A|B) = 2$*?.*

Sólo es posible si $|A| = 0$ y tiene algún menor de orden 2 distinto de 0, es decir:

$$|A| = \begin{vmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & a & 1 \\ 1 & 1 & a \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & a \end{vmatrix} = a^2 - 1 \neq 0 \text{ ó } \begin{vmatrix} a & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = a - 1 \neq 0,$$

Lo primero sucede, como vimos en el ejercicio 6, si $a = -2$. Es decir, para $a = -2$ se tiene que rg $(A) = 2$, entonces falta comprobar, si para $a = -2$ también rg $(A|B) = 2$.

Pero vimos en el ejercicio 7 que si $a = -2$:

$$\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -2 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = (-2)(-2) + 1 + 1 + 2 + 2 - 1 = 9 \neq 0$$

luego rg $(A|B) = 3$ y el sistema es incompatible $\Rightarrow$ No cumple las condiciones de sistema compatible indeterminado.

Como conclusión: el sistema $ax + y + z = 1$; $x + ay + z = 1$; $x + y + az = 1$ es compatible indeterminado si y sólo si $a = 1$ $\Rightarrow$ Sólo la opción A es cierta.

9. Dado el sistema $2x + 3y - z = 2$; $bx + ay + 2z = 0$; $5x + 5y + z = 0$, se verifica que: A) Si $a = 2$ y $b \neq 3$ el sistema es compatible indeterminado; B) Si $b = 3$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado; C) Si $a = 2$ y $b = 5$ el sistema es incompatible; D) Ninguna de las anteriores.

Este problema se puede resolver de dos formas, la primera es clasificar el sistema para todos los valores *a, b*, y la segunda, es sustituir cada uno de los valores de *a, b* dados y analizar el sistema obtenido en cada uno de los casos. Ésta última es la más sencilla.

¿Cómo es el sistema si $a = 2$ *y* $b \neq 3$*?.*

El sistema obtenido es: $2x + 3y - z = 2$; $bx + 2y + 2z = 0$; $5x + 5y + z = 0$.

El determinante de la matriz de coeficientes es:

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ b & 2 & 2 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 4 - 5b + 30 + 10 - 20 - 3b = 24 - 8b$$

que es distinto de 0 por ser $b \neq 3$.

Entonces rg (A) = rg $(A|B) = 3$ y el sistema es compatible determinado $\Rightarrow$ A es falsa.

¿Cómo es el sistema si $b = 3$ *y* $a \neq 2$*?.*

El sistema obtenido es $2x + 3y - z = 2$; $3x + ay + 2z = 0$; $5x + 5y + z = 0$.

$$|A|=\begin{vmatrix}2 & 3 & -1\\ 3 & a & 2\\ 5 & 5 & 1\end{vmatrix}=2a-15+30+5a-20-9=7a-14.$$

que es distinto de 0 por ser $a \neq 2$. Entonces rg (A) = rg $(A|B) = 3$ y el sistema es compatible determinado $\Rightarrow$ B es cierta.

¿Cómo es el sistema si $a = 2$ y $b = 5$?.

Si $a = 2$ y $b = 5$ estamos en un caso particular de la opción A, en la cual el sistema es compatible determinado $\Rightarrow$ C es falsa.

10. El sistema del ejercicio anterior verifica: A) Puede ser indeterminado; B) Puede ser incompatible; C) Puede ser compatible determinado; D) Ninguna de las anteriores.

Para resolver este problema vamos a aplicar el Teorema de Rouché-Frobenius. Siguiendo el esquema del principio de esta sección, hay que calcular tanto el rango de la matriz de los coeficientes $\left(\text{rg}\,(A)\right)$ como el de la matriz ampliada $\left(\text{rg}\,(A\,|\,B)\right)$ para los distintos valores de a y b.

$$(A\,|\,B)=\left(\begin{array}{ccc|c}2 & 3 & -1 & 2\\ b & a & 2 & 0\\ 5 & 5 & 1 & 0\end{array}\right)$$

Observamos que rg (A) y rg $(A|B)$ es mayor o igual que 2 para valores cualesquiera de a y b porque

$$\begin{vmatrix}3 & -1\\ 5 & 1\end{vmatrix}=3+5=8\neq 0.$$

¿Cuándo es $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 2$*?*.

Ocurrirá cuando todos los menores de orden 3 sean 0.

En la matriz A:

$$\text{rg}(A) = 2 \Leftrightarrow \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ b & a & 2 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2a + 30 - 5b + 5a - 20 - 3b = 7a - 8b + 10 = 0 \Leftrightarrow b = \frac{10 + 7a}{8}.$$

En la matriz $A|B$:

$$\text{rg}(A \mid B) = 2 \Leftrightarrow \begin{cases} \begin{vmatrix} 3 & -1 & 2 \\ a & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2a - 20 = 2(a - 10) = 0 \Leftrightarrow a = 10 \\ \begin{vmatrix} 2 & -1 & 2 \\ b & 2 & 0 \\ 5 & 1 & 0 \end{vmatrix} = 2b - 20 = 2(b - 10) = 0 \Leftrightarrow b = 10 \end{cases}$$

Como es imposible que $a = b = 10$ y que $b = \frac{10 + 7a}{8}$, nunca es $\text{rg}(A) = \text{rg}(A|B) = 2$ y el sistema no puede ser compatible indeterminado.

$\Rightarrow$ A es falsa.

¿Cuándo es $\text{rg}(A) = 2$ *y* $\text{rg}(A|B) = 3$*?*.

Ya sabemos que $\text{rg}(A) = 2$ si $b = \frac{10 + 7a}{8}$ y $\text{rg}(A \mid B) = 3$ cuando $a \neq 10$ ó $b \neq 10$.

Esta situación sí es posible, por ejemplo, si $a = 1$ y $b = 17/8 \Rightarrow$ B es cierta.

¿Cuándo es rg $(A) = 3$ *y* rg $(A|B) = 3$, *es decir, es compatible determinado?.*

rg $(A) = 3$ si $b \neq \dfrac{10+7a}{8}$ y rg $(A\,|\,B) = 3$ cuando $a \neq 10$ ó $b \neq 10$. Esta situación sí es posible, por ejemplo, si $a = 1$ y $b = 0 \Rightarrow$ C es correcta.

11. Dado el sistema de ecuaciones lineales $ax + y + z = a^2$; $x - y + z = 1$; $3x - y - z = 1$; $6x - y + z = 3a$, de entre la siguientes afirmaciones, son correctas: A) Si $a \neq 2$, el sistema es compatible indeterminado; B) Si $a = 2$ el sistema es compatible determinado; C) El sistema es siempre incompatible; D) Ninguna de las anteriores.

¿Cuál es el rango de A?.

Se trata de un sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas cuya matriz de coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{pmatrix}$. El rango máximo que puede tener es 3 (sólo tiene 3 columnas). Para calcularlo, consideramos el menor formado por las tres últimas filas:

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -1-3+6+6-1+3 = 10$$

entonces, rg $(A) = 3$ para cualquier valor de a.

¿Cuál es el rango de A|B?.

Desarrollando el determinante por la primera fila:

$$\det(A\,|\,B)=\begin{vmatrix} a & 1 & 1 & a^2 \\ 1 & -1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 1 & 3a \end{vmatrix} = a\begin{vmatrix} -1 & 1 & 1 \\ -1 & -1 & 1 \\ -1 & 1 & 3a \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 6 & 1 & 3a \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & 1 \\ 6 & -1 & 3a \end{vmatrix} -$$

$$-a^2\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 6 & -1 & 1 \end{vmatrix} = -4(a-2)^2$$

$$\det(A\,|\,B)\begin{cases} =0 \text{ si } a=2 \Rightarrow \operatorname{rg}(A)=\operatorname{rg}(A\,|\,B)=3=\text{número de incógnitas} \\ \qquad\qquad \Rightarrow \text{Sistema compatible determinado} \\ \neq 0 \text{ si } a\neq 2 \Rightarrow \operatorname{rg}(A)=3\neq \operatorname{rg}(A\,|\,B)=4 \\ \qquad\qquad \Rightarrow \text{Sistema incompatible} \end{cases}$$

$\Rightarrow$ Sólo es cierta la opción B.

12. El sistema lineal homogéneo $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; $x_1 - x_2 + x_3 = 0$; $2x_1 + ax_3 = 0$ es compatible indeterminado: A) Para $a = 1$; B) Para $a = 2$; C) Para $a \neq 2$: D) En ninguno de los casos anteriores.

❖ En un sistema homogéneo el rango de la matriz de coeficientes coincide siempre con el rango de la matriz ampliada porque para formar ésta se añade una columna de ceros, que es dependiente de las demás columnas.

El sistema dado tiene tres ecuaciones con tres incógnitas, se trata de calcular los valores de a para los cuales rg $(A) < 3$, siendo A la matriz de los coeficientes.

¿Qué valores puede tener rg (A)*?*.

$$A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{pmatrix}$$

tiene, al menos, rango 2, ya que existen menores de orden 2 distintos de 0.

Como debe ser rg $(A) < 3$, la única posibilidad es que sea rg $(A) = 2$, es decir, el determinante de A sea 0:

$$0 = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 1 \\ 2 & 0 & a \end{vmatrix} = -a + 2 + 2 - a = 2(2 - a) \Leftrightarrow a = 2$$

$\Rightarrow$ B es cierta.

¿Cuáles son las ecuaciones paramétricas del conjunto de soluciones?.

Si $a = 2$, unas ecuaciones paramétricas de las soluciones son $x_1 = \lambda$; $x_2 = 0$; $x_3 = -\lambda$, es decir, las soluciones forman el subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$ generado por $(1, 0, -1)$.

13. Las rectas $2x + ay = 1$; $2x - y = 0$; $ax + by = -1$ se cortan en un sólo punto si: A) $a = -1, b \neq \frac{1}{2}$; B) $a \neq -1, 3a + 2b + 2 = 0$; C) $a \neq -1, 3a + 2b + 2 \neq 0$.

❖ La expresión analítica de una recta en $\mathbb{R}^2$ es de la forma $ax + by = c$. Los puntos de intersección de varias rectas son las soluciones comunes al sistema formado por sus ecuaciones.

❖ Tres rectas se cortan en un único punto cuando el sistema de ecuaciones lineales que definen es compatible determinado.

Para que el sistema sea compatible e indeterminado hay que calcular los valores de los parámetros que hacen que rg (A) = rg $(A|B) = 2$, ya que el número de incógnitas es 2.

$$(A \mid B) = \left(\begin{array}{cc|c} 2 & a & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ a & b & -1 \end{array}\right).$$

La primera condición que ha de cumplirse, es que el determinante de la matriz ampliada sea 0, es decir,

$$\begin{vmatrix} 2 & a & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ a & b & -1 \end{vmatrix} = 2+2b+a+2a = 2+2b+3a = 0 \Leftrightarrow b = -\frac{2+3a}{2}.$$

Por otro lado, como rg (A) = rg $(A|B)$ = 2, debe suceder que la matriz de coeficientes tenga un menor de orden 2 distinto de 0. Es decir, que ocurra alguna de las condiciones siguientes:

$$\begin{vmatrix} 2 & a \\ 2 & -1 \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow -2-2a \neq 0 \Leftrightarrow a \neq -1$$

$$\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 2b-a \neq 0 \Leftrightarrow b \neq \frac{a}{2}$$

$$\begin{vmatrix} 2 & a \\ a & b \end{vmatrix} \neq 0 \Leftrightarrow 2b-a^2 \neq 0 \Leftrightarrow b \neq \frac{a^2}{2}$$

Como consecuencia, al analizar las opciones resulta:

- A es falsa porque si $a=-1, b \neq \frac{1}{2}$ entonces $\text{rg}(A \mid B)=3$.

- B es cierta porque si $a \neq -1$, $3a + 2b + 2 = 0$ entonces rg (A) = rg $(A|B) = 2 \Rightarrow$ Sistema compatible determinado y las rectas se cortan en un punto.

- C es falsa porque si $a \neq -1$, $3a + 2b + 2 \neq 0$ entonces rg $(A) \neq$ rg $(A|B) \Rightarrow$ Sistema incompatible.

14. El sistema $2x + 3y - z = 0$; $3x + ay - z = 0$; $-x - 6y + z = a$, es compatible determinado para: A) Cualquier valor de a; B) $a \neq 0$; C) $a = 0$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Para que un sistema de ecuaciones sea compatible determinado es necesario y suficiente que el rango de la matriz de coeficientes coincida con el rango de la matriz ampliada y con el número de incógnitas del sistema.

Luego debe de cumplirse que rg (A) = rg $(A|B) = 3$, es decir, que el determinante de la matriz de coeficientes sea distinto de 0, ya que el rango de la matriz ampliada no puede ser nunca mayor que 3.

$$(A\,|\,B) = \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 3 & -1 & 0 \\ 3 & a & -1 & 0 \\ -1 & -6 & 1 & a \end{array}\right).$$

$$|A| = \begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ 3 & a & -1 \\ -1 & -6 & 1 \end{vmatrix} = 2a + 18 + 3 - a - 12 - 9 = a.$$

Por tanto, si $a \neq 0$ el sistema es compatible determinado y B es cierta.

Si $a = 0$, entonces rg (A) = rg $(A|B) = 2$ y el sistema es compatible indeterminado.

15. Dado el sistema $2x + 3y - z = 2$; $bx + ay + 2z = 0$; $5x + 5y + z = 0$, entonces: A) Si $a = 2$ y $b \neq 3$, el sistema es compatible indeterminado; B) Si $b = 3$ y $a \neq 2$ el sistema es compatible determinado; C) Si $a = 2$ y $b = 5$ el sistema es incompatible; D) Todas las anteriores son falsas.

$$\begin{vmatrix} 2 & 3 & -1 \\ b & a & 2 \\ 5 & 5 & 1 \end{vmatrix} = 2a - 5b + 30 + 5a - 20 - 3b = 7a - 8b + 10.$$

Para resolver este problema, resulta más fácil estudiar cada caso particular expresado en las distintas opciones:

A. Si $a = 2$ y $b \neq 3 \Rightarrow$ rg $(A) = 2$ y rg $(A|B) = 3$, el sistema es incompatible $\Rightarrow$ A es falsa.

B. Si $b = 3$ y $a \neq 2 \Rightarrow$ rg $(A) =$ rg $(A|B) = 3$ y es un sistema compatible determinado $\Rightarrow$ B es cierta.

C. Si $a = 2$ y $b = 5 \Rightarrow$ rg $(A) =$ rg $(A|B) = 3 \Rightarrow$ C es falsa, ya que el sistema es compatible determinado.

16. La ecuación $2x + y - z = 0$ forma un sistema compatible indeterminado con las ecuaciones: A) $2x + 2y + z = 3$; $-y - 2z = -3$; B) $z = 0$; C) $x = 1$; $y = 0$; D) Con cualquiera de los sistemas de las opciones A, B, C.

¿Es compatible indeterminado el sistema formado por $2x + y - z = 0$; $2x + 2y + z = 3$; $-y - 2z = -3$*?.*

La matriz de coeficientes es $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 2 & 2 & 1 \\ 0 & -1 & -2 \end{pmatrix}$. Es fácil ver que el rango al menos es 2 y que la tercera fila es la resta de la primera menos la segunda, por tanto rg $(A) = 2$.

Si consideramos la matriz ampliada $\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 & 3 \\ 0 & -1 & -2 & -3 \end{pmatrix}$, la cuarta columna es la suma de la segunda y tercera, por tanto rg $(A|B) = 2 \Rightarrow$ A es cierta.

¿Cuál es el conjunto de soluciones de la opción B?.

El sistema $z = 0$; $2x + y - z = 0$ es equivalente al sistema $z = 0$; $2x + y = 0$ y tiene como conjunto de soluciones, en ecuaciones paramétricas, $x = \lambda$; $y = -2\lambda$;

$z = 0$. Esta solución la podemos escribir como $(x, y, z) = \lambda\,(1, -2, 0)$, que es el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $\{(1, -2, 0)\} \Rightarrow$ B es cierta.

¿Cuál es el conjunto de soluciones de la opción C?.

El sistema $y = 0$; $x = 1$; $2x + y - z = 0$ es equivalente al sistema $2 - z = 0$; $y = 0$; $x = 1$ tiene una única solución $y = 0$; $x = 1$; $z = 2 \Rightarrow$ C y D son falsas.

Ejercicios relativos a:

"Cálculo de soluciones de un sistema de ecuaciones."

1. El sistema $x_1 + x_2 + x_3 = 0$; $x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$; $x_2 - x_3 = 5$: A) No es de Cramer; B) Aplicando la regla de Cramer se demuestra que no tiene solución; C) Resolviéndolo por la regla de Cramer, se obtiene la solución $x_1 = 9$, $x_2 = 0$, $x_3 = -22$; D) Ninguna de las anteriores es cierta.

¿Es cierto que (9, 0, –22) *es solución del sistema?.*

Si en el sistema inicial sustituimos x_1 por 9, x_2 por 0 y x_3 por –22, se comprueba que no se verifica ninguna de las igualdades, por tanto C es falsa.

❖ Un sistema de ecuaciones se dice que es de Cramer, si

1. Tiene el mismo número de ecuaciones que de incógnitas.

2. El rango de la matriz de los coeficientes es máximo, es decir, el número de incógnitas.

¿Es un sistema de Cramer?.

La primera condición se cumple. Para comprobar si verifica o no la condición 2, calculamos el determinante de la matriz de los coeficientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & -1 \end{vmatrix} = 1,$$ luego el sistema es de Cramer $\Rightarrow$ La opción A es falsa.

¿Cómo se obtienen las soluciones utilizando la regla de Cramer?.

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}0&1&1\\2&-1&2\\5&1&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\0&1&-1\end{vmatrix}}=\frac{9}{7},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}1&0&1\\1&2&2\\0&5&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\0&1&-1\end{vmatrix}}=\frac{13}{7},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix}1&1&0\\1&-1&2\\0&1&5\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&1&1\\1&-1&2\\0&1&-1\end{vmatrix}}=-\frac{22}{7}$$

La solución existe y es $\left(\frac{9}{7},\frac{13}{7},\frac{-22}{7}\right)\Rightarrow$ D es cierta.

2. La solución del sistema $x_1+5x_2+3x_3=0$; $x_1+x_2+2x_3=2$; $x_1+x_2-x_3=3$, verifica; A) $x_3>0$; B) $x_1, x_2, x_3>1$; C) $x_1=37/12$; D) $x_2\in[-1, 0]$.

¿Es un sistema de Cramer?.

Sí, el sistema es de Cramer, ya que tiene el mismo número de ecuaciones que incógnitas y $\begin{vmatrix}1&5&3\\1&1&2\\1&1&-1\end{vmatrix}=12.$

¿Qué tipo de sistema es?.

Se cumple que $\text{rg}(A)=\text{rg}(A|B)=3$ y éste es el número de incógnitas $\Rightarrow$ Es compatible determinado.

¿Cuál es la solución?.

Por ser un sistema de Cramer, se puede utilizar la regla que lleva su nombre y:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}0&5&3\\2&1&2\\3&1&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&5&3\\1&1&2\\1&1&-1\end{vmatrix}}=\frac{37}{12},\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}1&0&3\\1&2&2\\1&3&-1\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&5&3\\1&1&2\\1&1&-1\end{vmatrix}}=-\frac{5}{12},\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix}1&5&0\\1&1&2\\1&1&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&5&3\\1&1&2\\1&1&-1\end{vmatrix}}=-\frac{1}{3}.$$

$\Rightarrow$ Las opciones C y D son ciertas y el resto falsas.

3. El sistema $x_1+2x_2+3x_3=1;\ 4x_1+5x_2+6x_3=2;\ x_1+x_2+ax_3=3$ no es de Cramer: A) Para $a=1$; B) Para $a=1/3$; C) Para $a\neq 1$; D) Siempre es de Cramer.

Para que el sistema dado sea de Cramer, el rango de la matriz de los coeficientes debe ser 3. Luego el determinante $\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\1&1&a\end{vmatrix}=3-3a$ debe ser distinto de 0. Esto sucede para $a=1\Rightarrow$ La opción A es cierta y el resto son falsas.

4. En el sistema anterior, para $a=3$ la solución (x_1, x_2, x_3) verifica: A) $x_1+x_2\leq x_3$; B) $x_1\in[0,1]$, $x_2\in\mathbb{N}$; C) $x_3\leq 1$; D) $x_2=-2$

Por el ejercicio anterior, si $a=3$ el sistema es de Cramer y la solución es:

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}1&2&3\\2&5&6\\3&1&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\1&1&3\end{vmatrix}}=1,\quad x_2=\frac{\begin{vmatrix}1&1&3\\4&2&6\\1&3&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\1&1&3\end{vmatrix}}=-2,\quad x_3=\frac{\begin{vmatrix}1&2&1\\4&5&2\\1&1&3\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}1&2&3\\4&5&6\\1&1&3\end{vmatrix}}=\frac{4}{3}.$$

Por consiguiente las opciones A y D son ciertas, pero B es falsa ya que $x_2 \in \mathbb{Z}$, y C es falsa porque 4/3 > 1.

5. El conjunto de soluciones del sistema $(a + 2)\, x_1 + x_2 + x_3 = a - 1$; $ax_1 + ax_3 = a - 1$; $ax_1 + (a - 1)\, x_2 + x_3 = a - 1$ verifica: A) Es vacío para $a \neq -1$; B) Siempre es vacío; C) Es un subespacio de dimensión 1 para $a = 1$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ El conjunto de soluciones de un sistema de ecuaciones lineales de n incógnitas, cuando es distinto del vacío, es un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^n$.

❖ "El conjunto de soluciones es vacío" equivale a decir que es incompatible.

¿Cuáles son los valores de a que hacen que el sistema sea incompatible?.

Primero determinamos lo valores de a para los que el sistema no es compatible determinado. Luego, para estos valores, determinamos cuándo es incompatible.

La matriz de los coeficientes es $A = \begin{pmatrix} a+2 & 1 & 1 \\ a & 0 & a \\ a & a-1 & 1 \end{pmatrix}$. Si calculamos su determinante resulta: $\det(A) = -a^3 + a^2 = a^2(1 - a) \Rightarrow$ Si $a = 0$ ó $a = 1$ el sistema no es compatible determinado.

Para $a = 0$ resulta rg $(A) = 2$; rg $(A|B) = 3$: el rango de la matriz ampliada no coincide con el rango de la matriz de coeficientes y el sistema no tiene solución, es incompatible.

Si $a = 1$ entonces, rg $(A) = 2 =$ rg $(A|B)$ y el sistema es compatible e indeterminado. Calculemos las soluciones.

En este caso el sistema es $3x_1 + x_2 + x_3 = 0$; $x_1 + x_3 = 0$; $x_1 + x_3 = 0$. Las dos últimas ecuaciones son iguales, luego el sistema a resolver es equivalente a $3x_1 + x_2 + x_3 = 0$; $x_1 + x_3 = 0$. En paramétricas, la solución es:

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -3\alpha + \alpha \\ x_3 = -\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

El conjunto de soluciones para $a = 1$ es un subespacio de dimensión 1 y es $\langle (1, -2, -1) \rangle \Rightarrow$ C es cierta.

¿Cuáles son los valores de a que hacen que el sistema sea compatible determinado?.

Por lo tanto, para $a \neq 1$ y $a \neq 0$, el rango de A es 3 y como el sistema tiene 3 ecuaciones y tres incógnitas será compatible determinado. La solución única se puede calcular aplicando la Regla de Cramer:

$$x_1 = \frac{\begin{vmatrix} a-1 & 1 & 1 \\ a-1 & 0 & a \\ a-1 & a-1 & 1 \end{vmatrix}}{a^2(1-a)} = \frac{-a^3 - 4a^2 - 5a + 2}{a^2(1-a)} = \frac{-(a-2)(a-1)^2}{a^2(1-a)} = \frac{(a-2)(a-1)}{a^2};$$

$$x_2 = \frac{\begin{vmatrix} a+2 & a-1 & 1 \\ a & a-1 & a \\ a & a-1 & 1 \end{vmatrix}}{a^2(1-a)} = \frac{-2a^2 - 4a - 2}{a^2(1-a)} = -2\frac{(a-1)^2}{a^2(1-a)} = 2\frac{a-1}{a^2};$$

$$x_3 = \frac{\begin{vmatrix} a+2 & 1 & a-1 \\ a & 0 & a-1 \\ a & a-1 & a-1 \end{vmatrix}}{a^2(1-a)} = \frac{-2a^2 - 4a - 2}{a^2(1-a)} = -2\frac{(a-1)^2}{a^2(1-a)} = 2\frac{a-1}{a^2}.$$

$\Rightarrow$ Las opciones A y B son falsas.

6. Dado el sistema de ecuaciones $x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0$; $2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0$; $6x_1 + 10x_2 + 2x_3 + 18x_4 = 0$; $5x_1 + 6x_2 - 10x_3 + x_4 = 0$, el subespacio de solucio-

nes verifica: A) Es de dimensión 2; B) Está generado por (8, –5, 1, 0); C) Está formado por {(0, 0, 0, 0)}; D) Ninguna de las anteriores.

❖ El sistema dado es homogéneo y, por tanto, es compatible porque al menos tiene la solución trivial (0, 0, 0, 0).

Para comprobar si el sistema tiene infinitas soluciones o una única solución (0, 0, 0, 0), calculamos el rango de la matriz de coeficientes (obsérvese que en este caso el rango de la matriz ampliada coincide con el rango de la matriz de coeficientes).

La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & -3 & -1 \\ 2 & 3 & -1 & 4 \\ 6 & 10 & 2 & 18 \\ 5 & 6 & -10 & 1 \end{pmatrix}$ tiene menores de orden 2 distintos de 0, por ejemplo el formado por las dos primeras filas y dos primeras columnas $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 1.$

Entonces, el rango de A es 2 o mayor que 2.

¿Se puede "ampliar" el menor $\begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 2 & 3 \end{vmatrix}$ *de modo que haya algún menor de A de orden 3 distinto de 0?.*

Si ampliamos el menor con la tercera y cuarta fila y con las columnas tercera y cuarta, resultan los determinantes

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 6 & 10 & 2 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 6 & 10 & 18 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -3 \\ 2 & 3 & -1 \\ 5 & 6 & -10 \end{vmatrix} = 0; \quad \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & 4 \\ 5 & 6 & 1 \end{vmatrix} = 0.$$

Como todos los menores de orden 3 son 0, el determinante de A también será 0 $\Rightarrow$ El rango de la matriz A es 2 $\Rightarrow$ El sistema es compatible indeterminado.

¿Qué soluciones tiene el sistema dado?.

❖ Debido a que el rango de la matriz de los coeficientes es 2, como mucho existen 2 filas l.i. (lo usual es elegir las que contienen al menor de orden 2 distinto de 0 que se ha encontrado) ⇒ El sistema es equivalente a otro de 2 ecuaciones.

Como el menor distinto de 0 que hemos encontrado es el que considera las dos primeras filas, el sistema dado es equivalente al sistema formado por las dos primeras ecuaciones,

$$\begin{cases} x_1 + x_2 - 3x_3 - x_4 = 0 \\ 2x_1 + 3x_2 - x_3 + 4x_4 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 = 3x_3 + x_4 \\ 2x_1 + 3x_2 = x_3 - 4x_4 \end{cases}.$$

Si multiplicamos por 2 la primera y le restamos la segunda resulta:

$$x_2 = -5x_3 - 6x_4.$$

Si multiplicamos por 3 la primera y le restamos la segunda resulta:

$$x_1 = 8x_3 + 7x_4.$$

Para obtener las ecuaciones paramétricas de las soluciones, hacemos $x_3 = \alpha$; $x_4 = \beta$ y se obtiene: $\begin{cases} x_1 = 8\alpha + 7\beta \\ x_2 = -5\alpha - 6\beta \\ x_3 = \alpha \\ x_4 = \beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 8 \\ -5 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 7 \\ -6 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ ⇒ La opción A es cierta, el subespacio de soluciones tiene dimensión 2 y está generado por los vectores (8, –5, 1, 0) y (7, –6, 0, 1).

7. Si se considera la aplicación lineal $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$ definida en las bases canónicas por: $f(1, 0, 1) = (2, 5, 1, 0)$; $f(0, 1, 0) = (2, 0, 0, 3)$; $f(3, 0, 0) = (1, 0, 1, 1)$, enton-

ces: A) La dimensión del núcleo es 2; B) Las ecuaciones del núcleo son $x_1 = \lambda$; $x_2 = 0$; $x_3 = 0$; C) La dimensión de la imagen es 2; D) Ninguna de las anteriores es cierta.

¿Forma matricial la aplicación lineal f?.

❖ Las columnas de la matriz asociada a f con las bases dadas son las imágenes de los vectores de la base de $\mathbb{R}^3$ expresada respecto a la base de $\mathbb{R}^4$.

Sean $\{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ y $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \bar{u}_3, \bar{u}_4\}$ las bases canónicas de $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente.

$$\text{Entonces} \begin{cases} f(\bar{e}_1 + \bar{e}_3) = 2\bar{u}_1 + 5\bar{u}_2 + \bar{u}_3 \\ f(\bar{e}_2) = 2\bar{u}_1 + 3\bar{u}_4 \\ f(3\bar{e}_1) = \bar{u}_1 + \bar{u}_3 + \bar{u}_4 \end{cases}.$$

Por ser aplicación lineal $f(\bar{e}_1 + \bar{e}_3) = f(\bar{e}_1) + f(\bar{e}_3)$ y $f(3\bar{e}_1) = 3f(\bar{e}_1)$.

$$\Rightarrow \begin{cases} f(\bar{e}_1) = \frac{1}{3}\bar{u}_1 + \frac{1}{3}\bar{u}_3 + \frac{1}{3}\bar{u}_4 \\ f(\bar{e}_2) = 2\bar{u}_1 + 3\bar{u}_4 \\ f(\bar{e}_3) = 2\bar{u}_1 + 5\bar{u}_2 + \bar{u}_3 - f(\bar{e}_1) = \left(2 - \frac{1}{3}\right)\bar{u}_1 + 5\bar{u}_2 + \left(1 - \frac{1}{3}\right)\bar{u}_3 - \frac{1}{3}\bar{u}_4 \end{cases}$$

Si denotamos (x_1, x_2, x_3) e (y_1, y_2, y_3, y_4) a las coordenadas en $\mathbb{R}^3$ y $\mathbb{R}^4$ respectivamente, las ecuaciones matriciales de la aplicación f son:

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2 & 5/3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \\ y_4 \end{pmatrix}.$$

Si desarrollamos la expresión matricial, resulta el sistema de cuatro ecuaciones con tres incógnitas (x_1, x_2, x_3) que define la aplicación lineal f.

¿Cuál es la dimensión de la imagen de f?.

El rango de la matriz de coeficientes (rango de f) es 3 (se determina fácilmente, eligiendo la submatriz cuadrada formada por las tres primeras filas y viendo que su determinante es distinto de 0). Por tanto, la dimensión de la imagen es $3 \Rightarrow$ C es falsa.

¿Cuáles son las ecuaciones del núcleo de f?.

❖ El Núcleo de $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^4$está formado por los vectores de $\mathbb{R}^3$ cuya imagen es (0,0,0,0).

$$\begin{pmatrix} 1/3 & 2 & 5/3 \\ 0 & 0 & 5 \\ 1/3 & 0 & 2/3 \\ 1/3 & 3 & -1/3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

¿Qué soluciones tiene el sistema anterior?.

Como rg (A) = rg $(A|B) = 3 \Rightarrow$ Solución única. Sabemos que (0, 0, 0) siempre es solución de cualquier sistema homogéneo, por tanto (0, 0, 0) es la única solución.

$\Rightarrow$ A y B son falsas, D es cierta.

8. La solución del sistema $x_1 + 2x_2 + 3x_3 = 1$; $5x_1 + 2x_2 + 4x_3 = 2$; $7x_1 + x_2 + 5x_3 = 3$; $6x_1 - x_2 + 2x_3 = 2$ verifica que: A) $15x_3 = 7$; B) $x_1, x_2, x_3 > 1$; C) $x_2 < x_1$, $x_1 \in [0, 1]$; D) No existe.

¿Se puede eliminar alguna ecuación sin que varíen las soluciones?.

Si sumamos la última ecuación y la primera se obtiene la tercera, $7x_1 + x_2 + 5x_3 = 3$, por tanto el sistema dado es equivalente a:

$$x_1+2x_2+3x_3=1;\ 5x_1+2x_2+4x_3=2;\ 7x_1+x_2+5x_3=3$$

¿El sistema obtenido es de Cramer?.

Para comprobar si el sistema es de Cramer o no, se calcula el determinante de la matriz de coeficientes. $\begin{vmatrix}1&2&3\\5&2&4\\7&1&5\end{vmatrix}=-15$, por ser distinto de 0 el sistema es de Cramer y tiene una única solución.

¿Cuál es la solución del sistema?.

$$x_1=\frac{\begin{vmatrix}1&2&3\\2&2&4\\3&1&5\end{vmatrix}}{-15}=\frac{2}{15},\ x_2=\frac{\begin{vmatrix}1&1&3\\5&2&4\\7&3&5\end{vmatrix}}{-15}=\frac{-4}{15},\ x_3=\frac{\begin{vmatrix}1&2&1\\5&2&2\\7&1&3\end{vmatrix}}{-15}=\frac{7}{15}.$$

$\Rightarrow$ Las opciones A y C son ciertas.

9. El sistema de ecuaciones lineales $x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$; $3x_1 + 2x_2 = 3$; $4x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$; $2x_1 - x_3 = 1$ es tal que: A) No se puede resolver por el método de Gauss; B) No tiene solución; C) Tiene infinitas soluciones; D) $x_1 = 9/13$; $x_2 = 6/13$; $x_3 = 5/13$ es una solución.

❖ El método de Gauss sirve para resolver sistemas de Cramer o sistemas que se pueden transformar en este tipo.

¿Se puede reducir el número de ecuaciones transformando el sistema en otro equivalente?.

El sistema dado tiene cuatro ecuaciones y tres incógnitas. Se observa que la última ecuación $2x_1 - x_3 = 1$ se obtiene restando a la segunda ecuación la primera.

Por lo tanto el sistema dado es equivalente al que resulta de eliminar la última ecuación, es decir al sistema: $x_1 + 2x_2 + x_3 = 2$; $3x_1 + 2x_2 = 3$; $4x_1 + x_2 + 2x_3 = 4$.

¿Es de Cramer el sistema obtenido?.

$$\det(A) = \begin{vmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 3 & 2 & 0 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = 4+3-8-12 = -13 \neq 0 \Rightarrow$$ el sistema es de Cramer y tiene una única solución $\Rightarrow$ A es cierta, B y C son falsas.

Aplicación del método de Gauss:

❖ El método de Gauss consiste en reducir, mediante transformaciones elementales en las filas, la matriz $(A|B)$ a la matriz $(U|C)$ siendo U una matriz triangular superior, el sistema obtenido es equivalente al dado y se resuelve por retro-sustitución.

¿Cuál es la matriz $(U|C)$?.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 3 & 2 & 0 & 3 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{①} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -3 \\ 4 & 1 & 2 & 4 \end{array}\right) \xrightarrow{②} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -3 \\ 0 & -7 & -2 & -4 \end{array}\right) \cdot$$

$$\xrightarrow{③} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 1 & 2 \\ 0 & -4 & -3 & -3 \\ 0 & 0 & 13/4 & 5/4 \end{array}\right).$$

Siendo las transformaciones:

①: $F_2 \to F_2 - 3F_1$

②: $F_3 \to F_3 - 4F_1$

③: $F_3 \to F_3 - \frac{7}{4}F_2$

De esta forma el sistema inicial es equivalente al sistema

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 + x_3 = 2 \\ -4x_2 - 3x_3 = -3 \\ \dfrac{13}{4}x_3 = \dfrac{5}{4} \end{cases}$$

Resolviendo por retro-sustitución resulta: $x_1 = 9/13$; $x_2 = 6/13$; $x_3 = 5/13$.

$\Rightarrow$ D es cierta.

❖ La retro-sustitución permite obtener el valor de x_3 en la última ecuación, sustituirlo en la penúltima y obtener el valor de x_2, sustituir los valores de x_3 y x_2 en la primera y obtener el valor de x_1.

10. Si se resuelve el sistema de ecuaciones lineales $2x_1 + x_2 + 3x_3 = 2$; $3x_1 + 2x_2 + x_3 = 1$; $x_1 + x_3 = 1$ mediante el método de Gauss: A) La solución es $x_1 = 1/2$; $x_2 = 1/2$; $x_3 = 1/2$; B) No tiene solución; C) Tiene infinitas soluciones; D) Ninguna de las anteriores.

El sistema dado es de Cramer porque el determinante de la matriz de coeficientes es distinto de 0. Entonces, se puede aplicar el método de Gauss y las opciones B y C son falsas.

❖ Mediante transformaciones elementales en las filas, la matriz $(A|B)$ se transforma en la matriz $(U|C)$ siendo U una matriz triangular superior.

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 3 & 2 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{①} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & \frac{1}{2} & -7/2 & -4/2 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{array}\right) \xrightarrow{②} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1/2 & -7/2 & -4/2 \\ 0 & -1/2 & -1/2 & 0 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow{③} \left(\begin{array}{ccc|c} 2 & 1 & 3 & 2 \\ 0 & 1/2 & -7/2 & -4/2 \\ 0 & 0 & -4 & -4/2 \end{array}\right).$$

Siendo las transformaciones:

$$①:\quad F_2 \to F_2 - \frac{3}{2}F_1$$

$$②:\quad F_3 \to F_3 - \frac{1}{2}F_1$$

$$③:\quad F_3 \to F_3 + F_2$$

Resolviendo por retro-sustitución el sistema $UX = C$ se obtiene la solución (1/2, –1/2, 1/2) y sólo es cierta la opción D.

11. En el ejercicio 5 del primer apartado, si se utilizan 2 ordenadores con el segundo sistema, durante 1 hora, se hace la Declaración de la Renta de: A) 300 personas; B) 500 personas; C) 400 personas; D) Ninguna de las anteriores.

Hay que resolver el sistema

$$\begin{cases} x + y + z = 600 \\ x + 3z = 700 \\ 2x + 2y = 800 \end{cases}$$

Lo vamos a hacer mediante el método de Gauss, partiendo de la matriz ampliada:

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 1 & 0 & 3 & 700 \\ 2 & 2 & 0 & 800 \end{array}\right) \xrightarrow[F_3 - 2F_1]{F_2 - F_1} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & 2 & 100 \\ 0 & 0 & -2 & -400 \end{array}\right) \xrightarrow{-\frac{1}{2}F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 600 \\ 0 & -1 & 2 & 100 \\ 0 & 0 & 1 & 200 \end{array}\right)$$

El sistema queda:

$$\left\{\begin{array}{rl} x+ & y+ z=600 \\ & -y+2z=100 \\ & z=200 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} x+ & y+ 200=600 \\ & -y+2\cdot 200=100 \\ & z=200 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{rl} x+ & y=400 \\ & y=300 \\ & z=200 \end{array}\right. \Rightarrow \left\{\begin{array}{l} x=100 \\ y=300 \\ z=200 \end{array}\right.$$

donde hemos aplicado retro-sustitución. Con 2 ordenadores con el segundo sistema se hacen $2 \cdot 300 = 600$ declaraciones durante 1 hora.

$\Rightarrow$ Es correcta D y el resto son falsas.

Ejercicios relativos a:

"Factorización *LU*."

1. El método de factorización *LU* se emplea para resolver sistemas de ecuaciones: A) De cualquier tipo; B) Tales que la matriz de coeficientes es cuadrada; C) Compatibles determinados de n ecuaciones y n incógnitas; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Resolución de sistemas de ecuaciones lineales mediante factorización *LU*: Dado un sistema $AX = B$ (A de orden n) se calcula la matriz triangular superior U y la matriz L, que hacen $A = LU$. Utilizando la matriz L, se transforma la matriz de términos independientes B en la matriz C, efectuando los mismos cambios que permitieron transformar A en U.

El método de factorización *LU* transforma el sistema dado $AX = B$ en uno equivalente de la forma $UX = C$, el cual se resuelve fácilmente por retro-sustitución.

Por tanto, el sistema debe ser compatible y, por ser la matriz de coeficientes cuadrada, determinado.

Entonces, la única opción correcta es **C** ya que las anteriores no son condiciones suficientes (que nos permitan asegurar) para que el sistema de ecuaciones lineales se resuelva mediante el método de factorización *LU*.

2. El método de factorización *LU* es especialmente útil para: A) Programar un algoritmo de resolución de ecuaciones; B) Resolver sistemas con pocas incognitas; C) Resolver sistemas con la misma matriz de los coeficientes y distintos términos independientes; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Mediante el método de factorización *LU* se transforma la matriz *A* en otra matriz *U* mediante transformaciones elementales, y la información de estas transformaciones se guarda en la matriz *L*. Por eso, es útil si queremos buscar algoritmos programables, especialmente para sistemas de muchas incógnitas.

La respuesta *A* es cierta y B es falsa.

❖ Conociendo la matriz *L* de un sistema de ecuaciones lineales, se transforma fácilmente la columna de los términos independientes.

Por esto, si hemos resuelto un sistema mediante la factorización *LU*, resolver otro con distintos términos independientes es inmediato ⇒ C es correcta.

3. Si se resuelve el sistema $2x + y + 3z = 2;\ 5x - z = 1;\ 3y + 2z = 5$ mediante el método de factorización *LU*, entonces una matriz *U* es: A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 & 3 \\ 0 & -5/2 & -17 \\ 0 & 0 & -41/5 \end{pmatrix}$

B) $\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -41/5 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 2 & 10 & 0 \\ 1 & -5/2 & 0 \\ 3 & -17/2 & -41/5 \end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ El método de factorización *LU* consiste en la creación de una matriz, llamada matriz *L*, que contiene información sobre las transformaciones que es necesario realizar en *A* para convertirla en una matriz triangular superior *U*, para poder, mediante esa información, resolver el sistema por el método de Gauss.

Para aplicar el método de factorización *LU* convertimos, mediante transformaciones en las filas, la matriz de coeficientes en una matriz triangular superior:

$$A=\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 5 & 0 & -1\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{①}\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -5/2 & -17/2\\ 0 & 3 & 2\end{pmatrix}\xrightarrow{②}\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\ 0 & -5/2 & -17/2\\ 0 & 0 & -41/5\end{pmatrix}=U$$

donde: ①: $F_2 \to F_2 - \frac{5}{2}F_1$

②: $F_3 \to F_3 + 3\frac{2}{5}F_2$

$\Rightarrow$ La respuesta correcta es B.

Como la matriz U debe ser triangular superior, la opción C se podría haber desechado previamente.

4. Si se aplica el método de factorización LU al problema anterior, la matriz L, que se obtiene mediante transformaciones elementales, verifica: A) Su tercera fila es (0 6/5 1); B) Su segunda fila es (5/2 1 0); C) Es una matriz triangular superior; D) Ninguna de las anteriores.

❖ La matriz L se crea a partir de la matriz identidad I y se obtiene de la siguiente forma: *En el proceso de obtención de la matriz triangular superior U, a partir de la matriz de coeficientes* $A = (a_{ij})$, *por cada transformación elemental que suponga la sustitución de la fila i por su suma con la fila j multiplicada por* α, *en la matriz unidad I se cambia el cero que ocupa la posición* (i, j) *por* $-\alpha$.

$$A \to U$$
$$I \to L$$

Para obtener L tenemos que trasladar a la matriz identidad I los cambios inducidos por las transformaciones:

Transformación 1: $F_2 \to F_2 - \frac{5}{2}F_1$. Cambio inducido: el cero de la segunda fila, columna 1, se sustituye por 5/2.

Transformación 2: $F_3 \to F_3 + 3\frac{2}{5}F_2$. Cambio inducido: el cero de la tercera fila, columna 2, se sustituye por –6/5.

Se obtiene

$$I = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{1} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5/2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \xrightarrow{2} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 5/2 & 1 & 0 \\ 0 & -6/5 & 1 \end{pmatrix} = L.$$

Comparando con las respuesta, observamos que sólo es correcta la opción B.

5. Si se aplica el método de factorización *LU* al problema anterior, la columna de los términos independientes se transforma en: A) (2 6 61/5)^t; B) Es única; C) (2 –4 1/5)^t; D) Ninguna de las anteriores.

Para determinar los nuevos términos independientes, tenemos que estudiar las transformaciones efectuadas, que son:

①: $F_2 \to F_2 - \frac{5}{2}F_1$

②: $F_3 \to F_3 + 3\frac{2}{5}F_2$

A continuación, hacemos las mismas transformaciones en la matriz columna de los términos independientes B y se transforma en la matriz C.

$$B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{①} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{②} \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1/5 \end{pmatrix} = C.$$

$\Rightarrow$ Es correcta C. Además, se obtiene de forma única multiplicando a la matriz columna B por $L^{-1} \Rightarrow$ B también es correcta.

6. La solución del problema 3 verifica: A) Es $x = 8/41$; $y = 69/41$; $z = -1/41$; B) Es única; C) No se puede calcular; D) Ninguna de las anteriores.

En primer lugar, el sistema dado tiene solución porque la matriz de los coeficientes es cuadrada y el rango de dicha matriz es 3. Por tanto, el sistema es compatible determinado y tiene un única solución $\Rightarrow$ B es cierta.

A partir de los resultados obtenidos en los ejercicios anteriores, para terminar se resuelve el sistema equivalente $UX = C$, es decir, el sistema

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & -5/2 & -17/2 \\ 0 & 0 & -41/5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 1/5 \end{pmatrix} \Leftrightarrow 2x + y + 3z = 2;\ \frac{-5}{2}y - \frac{17}{2}z = -4;\ \frac{-41}{5}z = \frac{1}{5}.$$

Resolviendo por retro-sustitución resulta: $x = 8/41$; $y = 69/41$; $z = -1/41$.

$\Rightarrow$ A es correcta.

7. La solución del sistema $2x + y + 3z = 1$; $5x - z = 1$; $3y + 2z = 1$: A) Es $x = 9/41$; $y = 11/41$; $z = 4/41$; B) Es $x = 9/41$; $y = 11/41$; $z = -4/41$; C) Es $x = 11/41$; $y = 9/41$; $z = 4/41$; D) Ninguna de las anteriores.

Observamos que este sistema es el mismo que el problema 2, excepto en los términos independientes. Como tenemos la descomposición LU de la matriz A, podemos utilizar esta información y transformar la matriz columna de los términos independientes y resolver por retro-sustitución.

Las transformaciones son:

$$①:\quad F_2 \to F_2 - \frac{5}{2}F_1.$$

$$②:\quad F_3 \to F_3 + 3\frac{2}{5}F_2.$$

Hacemos estas mismas transformaciones en la matriz columna de los términos independientes B y se transforma en la matriz C.

$$B=\begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{①}\begin{pmatrix}1\\-3/2\\1\end{pmatrix}\xrightarrow{②}\begin{pmatrix}1\\-3/2\\-4/5\end{pmatrix}=C.$$

Ahora, para terminar, se resuelve el sistema equivalente $UX = C$, es decir, el sistema:

$$\begin{pmatrix}2 & 1 & 3\\0 & -5/2 & -17/2\\0 & 0 & -41/5\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1\\-3/2\\-4/5\end{pmatrix}\Leftrightarrow 2x+y+3z=1;\ -\frac{5}{2}y-\frac{17}{2}z=$$

$$=-\frac{3}{2};\ -\frac{41}{5}z=-\frac{4}{5}.$$

Resolviendo por retro-sustitución resulta: $x = 9/41$; $y = 11/41$; $z = 4/41$ y A es la única opción correcta.

8. Sea el sistema de ecuaciones lineales $AX = B$ siendo $B=\begin{pmatrix}2\\1\\5\end{pmatrix}$. Si

$L=\begin{pmatrix}1 & 0 & 0\\-2 & 1 & 0\\3 & 5 & 1\end{pmatrix}$ es la matriz L asociada al sistema $AX = B$ mediante el mé

todo de factorización LU entonces, la matriz de los términos independien

tes se transforma en: A) $C=\begin{pmatrix}2\\1\\1\end{pmatrix}$; B) $C=\begin{pmatrix}2\\3\\3\end{pmatrix}$; C) $C=\begin{pmatrix}2\\5\\-26\end{pmatrix}$; D) Ninguna

de las anteriores.

❖ La información sobre las transformaciones elementales efectuadas en A para obtener la matriz triangular superior U se guardan en la matriz L.

Si se aplica el método de factorización LU al sistema dado, la matriz de los términos independientes B se transforma en la matriz C efectuando los mismos cambios que permitieron transformar A en U.

La información guardada en la matriz $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$ indica que se han efectuado los cambios siguientes:

①: El coeficiente –2 está asociado al elemento (2,1) e induce en B el cambio: $F_2 \rightarrow F_2 + 2F_1$.

Por tanto resulta $B = \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{①} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix}$.

②: El coeficiente 3 está asociado al elemento (3,1) e induce en B el cambio: $F_3 \rightarrow F_3 + F_1$.

Por tanto resulta $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ 5 \end{pmatrix} \xrightarrow{②} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix}$.

③: El coeficiente 5 está asociado al elemento (3,2) e induce en B el cambio: $F_3 \rightarrow F_3 - 5F_2$

Por tanto resulta $\begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -1 \end{pmatrix} \xrightarrow{③} \begin{pmatrix} 2 \\ 5 \\ -26 \end{pmatrix}$.

⇒ La opción correcta es C.

9. En el problema anterior, para pasar de la matriz A a la matriz U: A) se han tenido que hacer 4 transformaciones elementales; B) La matriz correspondiente a la primera transformación elemental es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; C) La matriz correspondiente a la segunda transformación elemental es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; D) La matriz correspondiente a la tercera transformación elemental es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}$.

❖ Se puede pasar de la matriz A a la matriz U mediante transformaciones elementales en sus filas que supongan sólo sustitución entre ellas. Si se hacen n transformaciones elementales, entonces $E_n\, E_{n-1} \ldots E_2\, E_1\, A = U$, siendo E_i la matriz correspondiente a la transformación elemental i-ésima. Esto equivale a $E_1^{-1} E_2^{-1} \ldots E_{n-1}^{-1} E_n^{-1} I = L$.

Como, en este caso, $L = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 0 \\ 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$, y las transformaciones son $F_2 \to F_2 + 2F_1$, $F_3 \to F_3 + F_1$, $F_3 \to F_3 - 5F_2$, se hacen 3 transformaciones elementales. A es falsa. Las matrices elementales correspondientes son:

$$F_2 \to F_2 + 2F_1 \to E_1 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$F_3 \to F_3 - 3F_1 \to E_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ -3 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$F_3 \to F_3 - 5F_2 \to E_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & -5 & 1 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ Son correctas las opciones B y D.

10. En sistemas inestables: A) Se pueden producir por error de redondeo; B) Una variación pequeña en los coeficientes produce una pequeña variación en los resultados; C) Una variación pequeña en los coeficientes produce una gran variación en los resultados; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Los sistemas mal condicionados o inestables son sistemas de ecuaciones donde una pequeña variación de los coeficientes produce una variación grande de los resultados. Esto se produce, principalmente, porque se arrastra un error de redondeo que ocasiona estas grandes variaciones.

$\Rightarrow$ A y C son correctas.

CAPÍTULO 5

PRODUCTO ESCALAR DE VECTORES Y ESPACIO EUCLÍDEO

Ejercicios relativos a:

"Definición, propiedades y expresión matricial del producto escalar."

1. Se define la operación $\bar{x} \bullet \bar{y} = \bar{x}' A \bar{y}$, siendo $\bar{x}, \bar{y}$ vectores de $\mathbb{R}^2$ (expresados como columna) y $A = \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}$ una matriz real, cuadrada y simétrica de orden dos, tal que $a > 0$ y $c > 0$. Entonces la operación definida verifica: A) Es conmutativa; B) $(\lambda \bar{x}) \bullet \bar{y} = \lambda(\bar{x} \bullet \bar{y})$, siendo λ un número real cualquiera; C) $(\bar{x} + \bar{y}) \bullet \bar{v} = \bar{x} \bullet \bar{v} + \bar{y} \bullet \bar{v}$; D) $\bar{x} \bullet \bar{x} > 0$ si $\bar{x} \neq \bar{0}$ y $\bar{x} \bullet \bar{x} = 0$ si $\bar{x} = \bar{0}$.

¿Es $\bar{x} \bullet \bar{y} = \bar{y} \bullet \bar{x}$ *?.*

Primer miembro:

$$\bar{x} \bullet \bar{y} = \bar{x}' A \bar{y} = (x_1, x_2) \begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = a x_1 y_1 + b x_2 y_1 + b x_1 y_2 + c x_2 y_2 .$$

Segundo miembro:

$$\bar{y} \bullet \bar{x} = \bar{y}^t A \bar{x} = (y_1, y_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ay_1x_1 + by_1x_2 + by_2x_1 + cy_2x_2.$$

$\Rightarrow$ La opción A es cierta porque los dos miembros son iguales.

¿Es $(\lambda\bar{x}) \bullet \bar{y} = \lambda(\bar{x} \bullet \bar{y})$*?.*

Primer miembro:

$$(\lambda\bar{x}) \bullet \bar{y} = (\lambda x_1, \lambda x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix} = \lambda a x_1 y_1 + \lambda b x_2 y_1 + \lambda b x_1 y_2 + \lambda c x_2 y_2.$$

Segundo miembro:

$$\lambda\left(\bar{x} \bullet \bar{y}\right) = \lambda\left((x_1, x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}\right) = \lambda a x_1 y_1 + \lambda b x_2 y_1 + \lambda b x_1 y_2 + \lambda c y_2 x_2.$$

$\Rightarrow$ La opción B es cierta porque los dos miembros son iguales.

¿Es $\left(\bar{x} + \bar{y}\right) \bullet \bar{v} = \bar{x} \bullet \bar{v} + \bar{y} \bullet \bar{v}$ *?.*

Primer miembro:

$$(\bar{x} + \bar{y}) \bullet \bar{v} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = a(x_1 + y_1)v_1 + b(x_2 + y_2)v_1 +$$

$$+b(x_1 + y_1)v_2 + c(x_2 + y_2)v_2.$$

Segundo miembro:

$$\bar{x} \bullet \bar{v} + \bar{y} \bullet \bar{v} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} + (y_1, y_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} v_1 \\ v_2 \end{pmatrix} = ax_1v_1 + bx_2v_1 + bx_1v_2 +$$

$$+cx_2v_2 + ay_1v_1 + by_1v_2 + by_2v_1 + cy_2v_2.$$

$\Rightarrow$ La opción C es cierta porque los dos miembros son iguales.

¿Es $\bar{x} \bullet \bar{x} = 0$ *si* $\bar{x} = \bar{0}$ *?.*

Primer miembro: $\bar{0} \bullet \bar{0} = (0,0)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} = a0 + 2b0 + c0 = 0.$

¿Es $\bar{x} \bullet \bar{x} > 0$ *si* $\bar{x} \neq \bar{0}$ *?.*

$$\bar{x} \bullet \bar{x} = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} a & b \\ b & c \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = ax_1^2 + 2bx_2x_1 + cx_2^2.$$

Esta expresión no siempre es positiva porque $2bx_2x_1$ puede ser negativo y de valor absoluto mayor que $ax_1^2 + cx_2^2$.

⇒ La opción D no es cierta.

2. En las condiciones del ejercicio anterior, para que la operación sea un producto escalar la matriz A debe cumplir: A) Ninguna condición; B) $a > 0$; C) $a > 0$ y $ac = b^2$; D) $a > 0$ y $ac - b^2 > 0$.

❖ En las opciones A, B y C del ejercicio anterior se comprobó que la operación cumple los tres primeros axiomas de un producto escalar en $\mathbb{R}^2$.

❖ La propiedad descrita en la opción D del ejercicio anterior, consta de dos partes:

Primera parte: $\bar{x} \bullet \bar{x} = 0$ si $\bar{x} = \bar{0}$, que como vimos es cierta.

Segunda parte: $\bar{x} \bullet \bar{x} > 0$ si $\bar{x} \neq \bar{0}$, que en general no va a verificarse ⇒ Si no se pone alguna condición no es cierta ⇒ La opción A de este ejercicio es falsa.

¿Qué condiciones debe cumplir A para que la operación dada sea producto escalar?.

Para ver cuando se verifica que $ax_1^2 + 2bx_2x_1 + cx_2^2 > 0$ vamos a descomponer esta expresión en suma de cuadrados.

Para simplificar los cálculos sacamos factor común a:

$$ax_1^2+2bx_2x_1+cx_2^2=a\left(x_1^2+2\frac{b}{a}x_2x_1+\frac{c}{a}x_2^2\right).$$

Añadimos dentro del paréntesis $\left(\frac{b}{a}x_2\right)^2=\frac{b^2}{a^2}x_2^2$, que es el sumando necesario para tener $\left(x_1+\frac{b}{a}x_2\right)^2$, y simultáneamente lo restamos para que la expresión siga teniendo el mismo valor:

$$a\left(x_1^2+2\frac{b}{a}x_2x_1+\frac{b^2}{a^2}x_2^2+\frac{c}{a}x_2^2-\frac{b^2}{a^2}x_2^2\right)=a\left(x_1+\frac{b}{a}x_2\right)^2+a\left(\frac{c}{a}x_2^2-\frac{b^2}{a^2}x_2^2\right)=$$

$$=a\left(x_1+\frac{b}{a}x_2\right)^2+\left(\frac{ca-b^2}{a}\right)x_2^2.$$

Como $a > 0$, el primer sumando es siempre positivo por ser un cuadrado. Para que el segundo sumando sea positivo debe cumplirse además que $ca - b^2 > 0$.

$\Rightarrow$ Sólo es cierta la opción D.

3. Si en el espacio vectorial C[a, b] de las funciones reales que están definidas y son continuas en el intervalo real [a, b], se estudia la operación $f\bullet g=\int_a^b f(x)g(x)\,dx$, siendo f y g elementos de C[a, b], es cierto que:

A) $f(x)\bullet g(x)=g(x)\bullet f(x)$; B) $[\lambda f(x)]\bullet g(x)=\lambda[f(x)\bullet g(x)]$;

C) $[f_1(x)+f_2(x)]\bullet g(x)=f_1(x)\bullet g(x)+f_2(x)\bullet g(x)$; D) $f(x)\bullet f(x)>0$ si $f(x)\neq 0$ y $f(x)\bullet f(x)=0$ si $f(x)=0$; E) La operación definida es producto escalar.

❖ Los vectores de C[a, b] son las funciones reales que son continuas en el intervalo real [a, b].

¿Es cierto que $f(x)\bullet g(x)=g(x)\bullet f(x)$*?.*

Sí, porque $f(x)\bullet g(x)=\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\int_a^b g(x)\,f(x)dx=g(x)\bullet f(x)\Rightarrow$ La opción A es cierta.

¿Es cierto que $[\lambda f(x)]\bullet g(x)=\lambda[f(x)\bullet g(x)]$*?.*

Sí, porque $[\lambda f(x)]\bullet g(x)=\int_a^b\big(\lambda f(x)\big)g(x)\,dx=\lambda\int_a^b f(x)g(x)\,dx=\lambda\big[f(x)\bullet g(x)\big]$

$\Rightarrow$ La opción B es cierta.

¿Es cierto que $[f_1(x)+f_2(x)]\bullet g(x)=f_1(x)\bullet g(x)+f_2(x)\bullet g(x)$*?.*

Sí, porque $[f_1(x)+f_2(x)]\bullet g(x)=\int_a^b[f_1(x)+f_2(x)]g(x)\,dx=\int_a^b f_1(x)g(x)dx+$

$+\int_a^b f_2(x)g(x)dx=f_1(x)\bullet g(x)+f_2(x)\bullet g(x)\Rightarrow$ La opción C es cierta.

¿Es cierto que $f(x)\bullet f(x)>0$ *si* $f(x)\neq 0$*?.*

$$f(x)\bullet f(x)=\int_a^b f(x)f(x)\,dx=\int_a^b[f(x)]^2dx.$$

Como $[f(x)]^2$ es una función positiva, su integral es positiva y la respuesta es sí es cierta la pregunta planteada.

¿Es cierto que $f(x)\bullet f(x)=0$ *si* $f(x)=0$*?.*

Como $[f(x)]^2$ es la función nula, su integral es nula y la respuesta es sí es cierta la pregunta planteada.

$\Rightarrow$ La opción D es cierta.

Por verificar todas las condiciones anteriores es un producto escalar $\Rightarrow$ La opción E es cierta.

❖ Para comprobar si son ciertas, o no, las propiedades de la operación "$\bullet$" hemos utilizado las propiedades que ya conocemos de las operaciones "$\cdot$" y "$+$" de funciones.

4. Si el espacio vectorial de los polinomios se define el producto escalar $P_1 \bullet P_2 = \int_0^1 P_1(x)P_2(x)dx$, es cierto que $(a+bx)\bullet(c+dx)$ es: A) $(a+bx)(c+dx)$; B) $\frac{ad+bc}{2}$; C) $ac+\frac{ad+bc}{2}+\frac{bd}{3}$; D) Ninguno de los anteriores.

$$\int_0^1 (a+bx)(c+dx)dx = \int_0^1 \left(ac+(ad+bc)x+bdx^2\right)dx =$$

$$= \left[acx+\frac{ad+bc}{2}x^2+\frac{bd}{3}x^3\right]_0^1 = ac+\frac{ad+bc}{2}+\frac{bd}{3}$$

$\Rightarrow$ Sólo es correcta la opción C.

5. Si en $\mathbb{R}^3$ la matriz que define el producto escalar en base $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ es $G=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, para calcular el producto escalar de dos vectores mediante la matriz G, sus coordenadas deben estar: A) En base B; B) En cualquier base porque el producto es independiente de la base elegida; C) En la base canónica; D) En otra base que hay que encontrar previamente.

Deben estar expresadas en base B.

Demostración:

$$\bar{x}=x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+x_3\bar{e}_3;\quad \bar{y}=y_1\bar{e}_1+y_2\bar{e}_2+y_3\bar{e}_3.$$
$$\bar{x}\bullet\bar{y}=(x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+x_3\bar{e}_3)\bullet(y_1\bar{e}_1+y_2\bar{e}_2+y_3\bar{e}_3).$$

utilizando las propiedades del producto escalar de la expresión anterior se obtiene:

$$\bar{x}\bullet\bar{y}=x_1y_1(\bar{e}_1\bullet\bar{e}_1)+x_1y_2(\bar{e}_1\bullet\bar{e}_2)+x_1y_3(\bar{e}_1\bullet\bar{e}_3)+x_2y_1(\bar{e}_2\bullet\bar{e}_1)+x_2y_2(\bar{e}_2\bullet\bar{e}_2)+$$
$$+x_2y_3(\bar{e}_2\bullet\bar{e}_3)+x_3y_1(\bar{e}_3\bullet\bar{e}_1)+x_3y_2(\bar{e}_3\bullet\bar{e}_2)+x_3y_3(\bar{e}_3\bullet\bar{e}_3).$$

Si denotamos $g_{ij} = \bar{e}_i \bullet \bar{e}_j$, es posible escribir el producto escalar $\bar{x} \bullet \bar{y}$ de forma matricial:

$$\bar{x} \bullet \bar{y} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}, \text{ donde}$$

$\begin{cases} \bar{x} = x_1\bar{e}_1 + x_2\bar{e}_2 + x_3\bar{e}_3 \\ \bar{y} = y_1\bar{e}_1 + y_2\bar{e}_2 + y_3\bar{e}_3 \end{cases}$, es decir, los vectores $\bar{x}$ e $\bar{y}$ están en base *B*.

$\Rightarrow$ Sólo es cierta la opción A.

6. Si en $\mathbb{R}^3$ la matriz que define el producto escalar en base $B = \{\bar{e}_1, \bar{e}_2, \bar{e}_3\}$ es $G = \begin{pmatrix} 3 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, es cierto que: A) $\bar{e}_1 \bullet \bar{e}_2 = 1$ y $\bar{e}_2 \bullet \bar{e}_1 = 3$; B) $\bar{e}_1 \bullet \bar{e}_2 = 1$ y $\bar{e}_3 \bullet \bar{e}_3 = 1$; C) $\bar{e}_1 \bullet \bar{e}_3 = 1$ y $\bar{e}_1 \bullet \bar{e}_1 = 3$; D) $\bar{e}_1 \bullet \bar{e}_1 = 3$ y $\bar{e}_2 \bullet \bar{e}_2 = 0$.

❖ Cada elemento g_{ij} de *G* es el producto escalar $\bar{e}_i \bullet \bar{e}_j$.

$\Rightarrow$ Son correctas las opciones B y C.

7. La matriz $G = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda^2 & 4\lambda \end{pmatrix}$ no puede definir un producto escalar en ninguna base de $\mathbb{R}^2$ cuando: A) $\lambda = 0$; B) $\lambda = 1$; C) $\lambda = -1$; D) Siempre existe alguna base para la que *G* define un producto escalar para cualquier valor real de λ.

❖ Recordemos las propiedades que debe tener una matriz para definir un producto escalar:

$g_{ij} = g_{ji}$, $\forall i \neq j$ (La matriz G debe ser simétrica).
$g_{ij} > 0$, $\forall i = j$ (Todos los elementos de la diagonal principal deben ser positivos).
$g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2 \geq 0$, $\forall i, j$.

¿En qué opciones no es simétrica la matriz G?.

Para $\lambda = 0$, porque es falso que $\lambda^2 = 1 \Rightarrow$La opción A es falsa.

De las restantes opciones, ¿en cuáles no son positivos todos los elementos de la diagonal principal de G?.

Si $\lambda = -1$ el término $g_{22} = -4 \Rightarrow$ La opción C es falsa.

De las restantes opciones, ¿en cuáles no se cumple $g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2 \geq 0$, $\forall i, j$?.

La única opción que cumple las dos primeras condiciones es para $\lambda = 1$.

Si $\lambda = 1$, entonces $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ \lambda^2 & 4\lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 4 \end{pmatrix}$.

Si $i = 1, j = 2 \Rightarrow g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2 = 1.4 - 1^2 \geq 0$.

Si $i = 2, j = 1 \Rightarrow g_{ii}g_{jj} - g_{ij}^2 = 4.1 - 1^2 \geq 0$.

$\Rightarrow$ Sólo es correcta la opción B.

8. Cuando en el espacio vectorial de polinomios reales de grado menor que tres con una indeterminada, x, se consideran la base $\{1, x, x^2\}$ y el producto escalar $P_1 \bullet P_2 = \int_{-1}^{1} P_1(x)P_2(x)dx$, la matriz de Gram, G, que define el producto escalar dado es: A) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$

C) $\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 1 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$; D) No existe dicha matriz.

❖ La matriz G es simétrica, como consecuencia la opción C no puede ser correcta.

¿Cómo se calcula la matriz de Gram?.

$$\left.\begin{array}{l} g_{11}=\int_{-1}^{1}(1)(1)dx=2. \\ g_{12}=g_{21}=\int_{-1}^{1}(1)(x)dx=0. \\ g_{13}=g_{31}=\int_{-1}^{1}(1)(x^2)dx=\frac{2}{3}. \\ g_{22}=\int_{-1}^{1}(x)(x)dx=\frac{2}{3}. \\ g_{23}=\int_{-1}^{1}(x)(x^2)dx=0. \\ g_{33}=\int_{-1}^{1}(x^2)(x^2)dx=\frac{2}{5}. \end{array}\right\} \Rightarrow G=\begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$$

$\Rightarrow$ Sólo es correcta la opción A.

9. Si en el conjunto de las matrices reales cuadradas de orden dos, $M_{2\times2}$, se define $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix}=a_{11}b_{11}+a_{12}b_{12}+a_{21}b_{21}+a_{22}b_{22}$, el producto escalar que determina verifica: A) No admite matriz de Gram por estar definido entre matrices; B) La matriz asociada para la base canónica de $M_{2\times2}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; C) La matriz asociada para la base canónica de $M_{2\times2}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ De entre las opciones dadas hay que desechar la A, porque un producto escalar siempre lleva asociada una matriz cuando se ha fijado una base.

❖ Por ser "•" un producto escalar tiene matriz asociada, la matriz de Gram, que es única para cada base.

¿Base canónica de $M_{2\times2}$?.

La base canónica de $M_{2\times2}$ es $\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3,\bar{e}_4\}$ siendo $\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}$; $\bar{e}_2=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}$;

$\bar{e}_3=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; $\bar{e}_4=\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$.

¿Cómo es la matriz de Gram asociada a "•" cuando en $M_{2\times2}$ se toma la base canónica?.

❖ Cada elemento g_{ij} de G es el producto escalar $\bar{e}_i\bullet\bar{e}_j$.

❖ G es una matriz real cuadrada simétrica de orden 4.

❖ Sus elementos son:

$$\bar{e}_1\bullet\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}=1.1+0.0+0.0+0.0=1.$$

$$\bar{e}_1\bullet\bar{e}_2=\bar{e}_2\bullet\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0 & 1\\ 0 & 0\end{pmatrix}=1.0+0.1+0.0+0.0=0.$$

$$\bar{e}_1\bullet\bar{e}_3=\bar{e}_3\bullet\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0 & 0\\ 1 & 0\end{pmatrix}=1.0+0.0+0.1+0.0=0.$$

$$\bar{e}_1\bullet\bar{e}_4=\bar{e}_4\bullet\bar{e}_1=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\bullet\begin{pmatrix}0 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}=1.0+0.0+0.0+0.1=0.$$

$$\bar{e}_2 \bullet \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = 0.0+1.1+0.0+0.0 = 1.$$

$$\bar{e}_2 \bullet \bar{e}_3 = \bar{e}_3 \bullet \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.0+1.0+1.0+0.0 = 0.$$

$$\bar{e}_2 \bullet \bar{e}_4 = \bar{e}_4 \bullet \bar{e}_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.0+1.0+0.0+0.1 = 0.$$

$$\bar{e}_3 \bullet \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} = 0.0+0.0+0.0+1.1 = 1.$$

$$\bar{e}_3 \bullet \bar{e}_4 = \bar{e}_4 \bullet \bar{e}_3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.0+0.0+1.0+0.1 = 0.$$

$$\bar{e}_4 \bullet \bar{e}_4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = 0.0+0.0+0.0+1.1 = 1.$$

$\Rightarrow$ Sólo es cierta la opción B.

10. Con el producto escalar definido en el ejercicio anterior, $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ verifica: A) Es 12; B) Es –12; C) No se puede escribir de forma matricial; D) Ninguna de las anteriores.

¿Producto escalar de $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *por* $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$*?.*

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = 3.1+1(-1)+2(-5)+20 = 12.$$

❖ También se puede hacer utilizando la matriz de Gram, para ello hay que calcular previamente las coordenadas de los vectores en la base a que está referida la matriz.

¿Coordenadas de $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *respecto a* $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$*?.*

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} = 3\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} + 2\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son (3, 1, 2, 4).

¿Coordenadas de $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$ *respecto a* $\left\{\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\right\}$*?.*

$$\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = 1\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 1\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} - 5\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} + 5\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Son (1, –1, –5, 5).

¿Producto escalar de $\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ *por* $\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix}$*?.*

$$\begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 4 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -5 & 5 \end{pmatrix} = (3\ 1\ 2\ 4)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} = (3\ 1\ 2\ 4)\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ -5 \\ 5 \end{pmatrix} =$$

$$= 3.1 + 1(-1) + 2(-5) + 20 = 12.$$

$\Rightarrow$ Sólo es correcta la opción A.

Ejercicios relativos a:

"Normas y vectores unitarios, ángulos y vectores ortogonales."

1. Si en $\mathbb{R}^3$ la matriz que define el producto escalar en base $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ es $G=\begin{pmatrix}3&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$, la norma de $(1,2,1)_B$ es: A) $\left|\sqrt{14}\right|$; B) 6; C) $\left|\sqrt{6}\right|$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ La matriz $\begin{pmatrix}3&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}$ define el producto escalar

$$\bar{x}\bullet\bar{y}=\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}y_1\\y_2\\y_3\end{pmatrix},\text{ siendo }\bar{x},\bar{y}\text{ vectores de }\mathbb{R}^3.$$

❖ El cuadrado de la norma del vector $\bar{x}$, es $\begin{pmatrix}x_1&x_2&x_3\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}$.

$\begin{pmatrix}1&2&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}3&1&1\\1&1&0\\1&0&1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\\1\end{pmatrix}=14\Rightarrow$ Sólo es válida la opción A.

2. Si en el conjunto de las matrices reales cuadradas de orden dos se define el producto escalar: $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$, es cierto que la norma de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ es: A) 15; B) $\left|\sqrt{15}\right|$; C) Una matriz no tiene norma; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Los vectores del espacio vectorial dado son matrices reales cuadradas de orden dos.

❖ La norma de un vector $\bar{v}$ con el producto escalar "•" se define como: $\|\bar{v}\| = \left|\sqrt{\bar{v} \bullet \bar{v}}\right|$.

¿Norma de $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$*?.*

$\left\|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\| = \left|\sqrt{1+4+1+9}\right| = \left|\sqrt{15}\right| \Rightarrow$ Sólo es cierta la opción B.

3. Si en el conjunto de las matrices reales 2×2, se define el producto escalar $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$, es cierto que: A) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ son ortogonales; B) $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix}$ y $\begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ no son ortogonales; C) La matriz $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ es ortogonal a sí misma; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Para que dos vectores sean ortogonales su producto escalar debe ser 0.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} -1 & -3 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} = -11 \Rightarrow$ La opción A es falsa y la opción B es cierta.

$\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = 15 \Rightarrow$ La opción C es falsa.

4. Si el espacio vectorial de los polinomios se define el producto escalar $P_1 \bullet P_2 = \int_0^1 P_1(x)P_2(x)dx$, la norma de $(a + bx)$ es: A) $\frac{3a^2+3ab+b^2}{3}$; B) $\left|\sqrt{\frac{3a^2+3ab+b^2}{3}}\right|$; C) $\pm\sqrt{\frac{3a^2+3ab+b^2}{3}}$; D) Ninguno de los valores anteriores.

❖ La norma de un vector es el valor absoluto de la raíz cuadrada del producto escalar del vector por sí mismo.

¿Cuadrado de la norma?.

$$\|a+bx\|^2 = (a+bx)\bullet(a+bx) = \int_0^1 (a+bx)(a+bx)dx = \left[a^2 x + abx^2 + \frac{b^2}{3}x^3\right]_0^1 =$$

$$= a^2 + ab + \frac{b^2}{3}.$$

$$\|a+bx\| = \left|\sqrt{a^2+ab+\frac{b^2}{3}}\right| = \left|\sqrt{\frac{3a^2+3ab+b^2}{3}}\right| \Rightarrow$$ Sólo es correcta la opción B.

5. Si en el espacio vectorial de polinomios con una indeterminada, x, reales de grado menor que dos se define el producto escalar

$P_1 \bullet P_2 = \int_{-1}^{1} P_1(x)P_2(x)dx$. el vector $2x - 3$ es ortogonal a: A) $3x + 2$; B) $9x + 2$; C) $2x + 3$; D) Ninguno de los anteriores.

❖ Los vectores de este espacio vectorial son polinomios de la forma $ax + b$ con a y b reales.

❖ Para ver si dos vectores son ortogonales hay que comprobar si su producto escalar es 0.

$$\int_{-1}^{1}(2x-3)(3x+2)dx = \int_{-1}^{1}(6x^2-5x-6)dx = \left[2x^3 - \frac{5}{2}x^2 - 6x\right]_{-1}^{1} = -8 \neq 0.$$

$\Rightarrow$ La opción A es falsa.

$$\int_{-1}^{1}(2x-3)(9x+2)dx = \int_{-1}^{1}(18x^2-23x-6)dx = \left[6x^3 - \frac{23}{2}x^2 - 6x\right]_{-1}^{1} = 0.$$

$\Rightarrow$ La opción B es cierta.

$$\int_{-1}^{1}(2x-3)(2x+3)dx = \int_{-1}^{1}(4x^2-12x+9)dx = \left[\frac{4}{3}x^3 - 6x^2 + 9x\right]_{-1}^{1} = \frac{62}{3} \neq 0.$$

$\Rightarrow$ La opción C es falsa.

Sólo son ortogonales $2x - 3$ y $9x + 2$.

6. En el espacio vectorial de los polinomios se define el producto escalar $P_1 \bullet P_2 = \int_0^1 P_1(x)P_2(x)dx$. Cuando $(a + bx)$ es ortogonal a x^2 su norma es:

A) $\left|b\right|\left|\sqrt{\frac{7}{48}}\right|$; B) $\left|\sqrt{\frac{a^2+ab+b^2}{3}}\right|$; C) $\left|\frac{7b}{48}\right|$; D) Ninguna de las anteriores.

Como $(a + bx)$ es ortogonal a x^2 su producto escalar es 0, es decir,

$$\int_0^1 (a+bx)x^2dx = \int_0^1 (ax^2+bx^3)dx = \left[\frac{ax^3}{3} + \frac{bx^4}{4}\right]_0^1 = \frac{a}{3} + \frac{b}{4} = 0 \Leftrightarrow a = -\frac{3b}{4}.$$

¿Cuál es la norma de $(a + bx)$?.

$$\|a+bx\|^2 = (a+bx)\bullet(a+bx) = \int_0^1 (a+bx)(a+bx)dx = \left[a^2x + abx^2 + \frac{b^2}{3}x^3\right]_0^1 =$$

$$= a^2 + ab + \frac{b^2}{3} \Rightarrow \|a+bx\| = \left|\sqrt{a^2+ab+\frac{b^2}{3}}\right| = \left|\sqrt{\frac{3a^2+3ab+b^2}{3}}\right|.$$

Como $a = -\frac{3b}{4} \Rightarrow \|a+bx\| = \left|\sqrt{\frac{1}{3}\left(\frac{27b^2}{16} - \frac{9b^2}{4} + b^2\right)}\right| = |b|\left|\sqrt{\frac{7}{48}}\right| \Rightarrow$ Es correcta la opción A.

7. Si el espacio vectorial de los polinomios se define el producto escalar $P_1 \bullet P_2 = \int_0^1 P_1(x)P_2(x)dx$, para que $(a + bx)$ sea ortogonal a $x + 3$ debe verificarse: A) $(a + bx) = (3 + x)$; B) $ax + 3bx^2 = 0$; C) $21a + 11b = 0$; D) Ninguna de las anteriores.

$$\int_0^1 (a+bx)(3+x)dx = \int_0^1 \left(3a + (a+3b)x + bx^2\right)dx = \left[3ax + \frac{a+3b}{2}x^2 + \frac{b}{3}x^3\right]_0^1 =$$

$$= \frac{21a+11b}{6} = 0 \Rightarrow \text{Es correcta la opción C.}$$

8. En $\mathbb{R}^2$ se define el producto escalar de los vectores $\bar{x} = (x_1, x_2)$ e $\bar{y} = (y_1, y_2)$ como: $\bar{x} \bullet \bar{y} = 4x_1y_1 + x_1y_2 + x_2y_1 + 9x_2y_2$. El vector de norma 1, ortogonal a (0, 1) con el producto escalar dado es: A) $\left(\frac{-1}{\sqrt{315}}, \frac{1}{\sqrt{315}}\right)$; B) (1, 0); C) (–1, 0); D) Ninguno de las anteriores.

Cualquier vector $\bar{y} = (y_1, y_2)$ ortogonal a $\bar{x} = (0,1)$ cumple

$4.0y_1 + 0y_2 + 1y_1 + 9.1y_2 = 0 \Rightarrow y_1 = -9y_2$.

Como ninguno de los vectores dados verifica esta relación ⇒ La opción correcta es D.

¿Qué vector es el pedido?.

La matriz métrica es $\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}$.

El vector pedido es de la forma $(-9k, k)$ y tiene norma 1, luego

$$(-9k \quad k)\begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 1 & 9 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -9k \\ k \end{pmatrix} = 1 \Rightarrow 315k^2 = 1.$$

⇒ Son solución los vectores $\left(\frac{-9}{\sqrt{315}}, \frac{1}{\sqrt{315}}\right)$ y $\left(\frac{9}{\sqrt{315}}, \frac{-1}{\sqrt{315}}\right)$.

9. Los vectores que tienen su origen en el punto (3, 3) y sus extremos en los puntos (2, 6) y (5, 3), respectivamente, son los lados de un cuadrilátero tal que: A) La norma de su diagonal mayor es $\left|\sqrt{18}\right|$; B) La norma de su diagonal menor es $-\left|\sqrt{18}\right|$; C) El producto escalar de sus diagonales es 0; D) Ninguna de las anteriores.

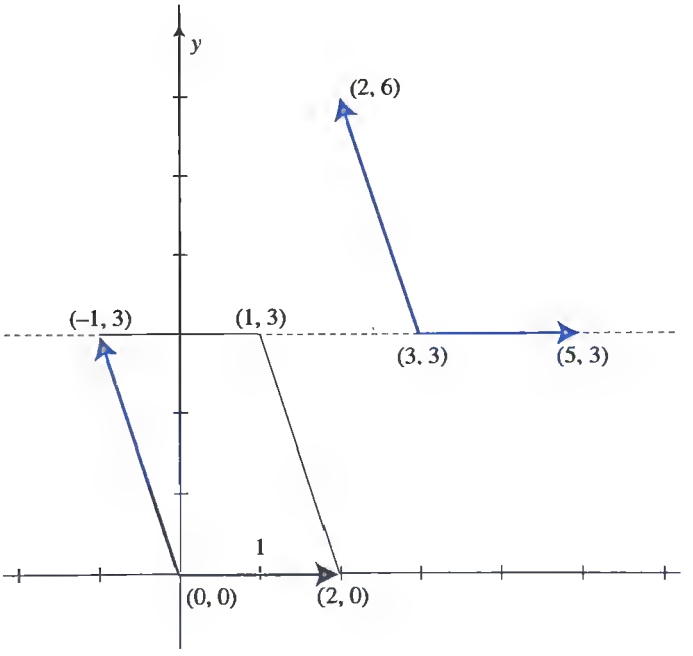
❖ Como no se dice nada en contra, se utilizará el producto escalar estándar en $\mathbb{R}^2$.

¿Qué vectores del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ son los lados del paralelogramo?.

Los lados del paralelogramo dado son representantes de vectores libres que no tienen su origen en (0, 0).

Los vectores equivalentes a los lados del paralelogramo que tienen su origen en (0, 0) son vectores del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$, estos representantes de los mismos vectores libres son (5, 3) – (3, 3) = (2, 0) y (2, 6) – (3, 3) = (–1, 3) respectivamente.

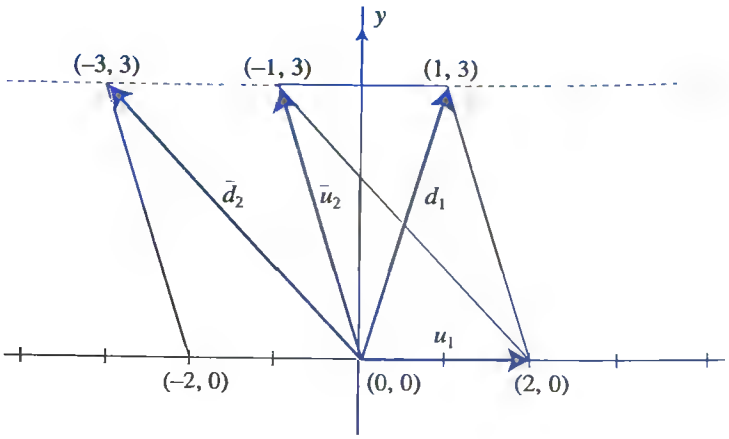
Los vectores $\bar{u}_1 = (2,0)$ y $\bar{u}_2 = (-1,3)$ son los lados del cuadrilátero sobre el que vamos a trabajar.



¿Qué vectores del espacio vectorial $\mathbb{R}^2$ son las diagonales del paralelogramo?.

$\bar{d}_1 = \bar{u}_1 + \bar{u}_2 = (2,0) + (-1,3) = (1,3)$ es la diagonal cuyo origen es el vértice (0, 0).

$\bar{d}_2 = -\bar{u}_1 + \bar{u}_2 = -(2,0) + (-1,3) = (-3,3)$ es la diagonal cuyo origen es el vértice (2, 0).



¿Norma de las diagonales?.

$(1,3)\bullet(1,3)=1.1+3.3=10\Rightarrow\left\|\bar{d}_1\right\|=\left\|(1,3)\right\|=\left|\sqrt{10}\right|.$

$(-3,3)\bullet(-3,3)=(-3)(-3)+3.3=18\Rightarrow\left\|\bar{d}_2\right\|=\left\|(3,-3)\right\|=\left|\sqrt{18}\right|\Rightarrow$ La opción A es cierta y la opción B es falsa.

Para ver que la opción B es falsa basta observar que no es un valor positivo.

¿Producto escalar de las diagonales?.

$\bar{d}_1\bullet\bar{d}_2=(1,3)\bullet(-3,3)=1(-3)+3.3=6\Rightarrow$ La opción C es falsa.

10. En el paralelogramo del ejercicio anterior es cierto que el coseno del ángulo que forman las diagonales es: A) 0; B) $\frac{-3}{\sqrt{7}}$; C) $\frac{-\sqrt{5}}{5}$; D) Distinto a todas las opciones anteriores.

❖ El ángulo que forman dos vectores no nulos $\bar{x}, \bar{y}$ pertenecientes a un espacio vectorial euclídeo se puede calcular a través de su coseno mediante la expresión $\cos(\bar{x},\bar{y}) = \dfrac{\bar{x} \bullet \bar{y}}{\|\bar{x}\| \|\bar{y}\|}$.

Teniendo en cuenta los resultados del ejercicio anterior podemos escribir:

$$\cos(\bar{d}_1,\bar{d}_2) = \frac{\bar{d}_1 \bullet \bar{d}_2}{\|\bar{d}_1\| \|\bar{d}_2\|} = \frac{6}{|\sqrt{10}||\sqrt{18}|} = \frac{1}{\sqrt{5}} = \frac{\sqrt{5}}{5} \Rightarrow$$ Sólo la opción D es cierta.

11. El ángulo que forman las diagonales de dos caras contiguas de un cubo que concurren en un vértice es: A) 60°; B) 30°; C) 45°; D) Ninguno de los anteriores.

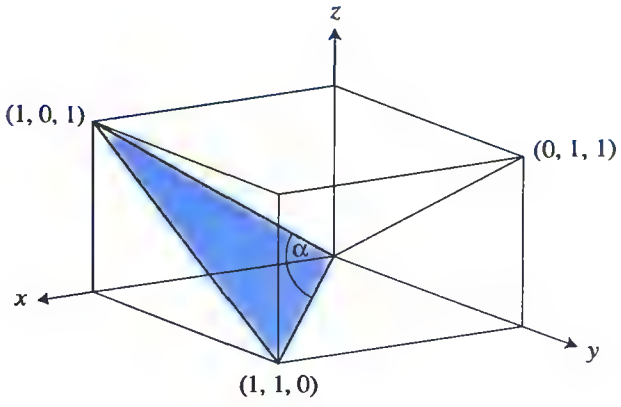
❖ El ángulo que forman las diagonales de las caras de un cubo que concurren en el vértice (0, 0, 0) es independiente del lado del cubo.

Si tomamos un cubo de lado 1, dichas diagonales son los vectores (1, 1, 0), (0, 1, 1) y (1, 0, 1).

Dos cualesquiera pertenecen a caras consecutivas y forman el mismo ángulo.

Si elegimos el ángulo formado por (0, 1, 1) y (1, 0, 1), el coseno del ángulo formado es $\cos\alpha = \dfrac{(0,1,1) \bullet (1,0,1)}{\|(0,1,1)\| \|(1,0,1)\|} = \dfrac{0.1+1.0+1.1}{\sqrt{2}\ \sqrt{2}} = \dfrac{1}{2}$.

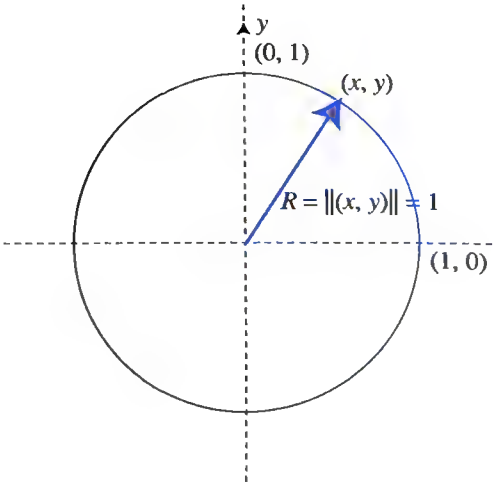
El ángulo cuyo coseno es $\dfrac{1}{2}$ es 30° $\Rightarrow$ Es correcta la opción B.



12. En $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar estándar, todos los vectores unitarios están en: A) El círculo de radio 1 y centro (0, 0); B) La circunferencia de radio 1 y centro (0, 0); C) El subespacio de ecuación $x = y$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Un vector es unitario cuando su norma es 1.

❖ En $\mathbb{R}^2$ el vector unitario $\dfrac{\overline{x}}{\|\overline{x}\|}$ tiene el mismo sentido y dirección que $\overline{x}$, pero su norma es 1.



Si $\|\bar{x}\| = 1$, también $\|\bar{x}\|^2 = 1$.

$$\|\bar{x}\|^2 = \|(x_1, x_2)\|^2 = (x_1, x_2) \bullet (x_1, x_2) = x_1 x_1 + x_2 x_2 = x_1^2 + x_2^2 = 1.$$

Los vectores que cumplen la condición anterior forman la circunferencia de radio 1 y centro (0, 0) ⇒ Sólo es correcta la opción B.

❖ Los vectores de la opción A son aquellos cuya norma es ≤ 1.

13. En $\mathbb{R}^2$, con el producto escalar $\bar{x} \bullet \bar{y} = \frac{x_1 y_1}{a^2} + \frac{x_2 y_2}{b^2}$, siendo $a \neq b$, $\bar{x} = (x_1, x_2)$ e $\bar{y} = (y_1, y_2)$, todos los vectores unitarios están en: A) Una elipse; B) Una circunferencia; C) Una parábola; D) Una hipérbola.

Si $\|\bar{x}\| = 1$, también $\|\bar{x}\|^2 = 1$.

$$\|\bar{x}\|^2 = \bar{x} \bullet \bar{x} = (x_1, x_2) \bullet (x_1, x_2) = \frac{x_1^2}{a^2} + \frac{x_2^2}{b^2} = 1.$$

Los vectores que cumplen la condición anterior forman la elipse de semiejes a y b y centro (0, 0) ⇒ Sólo es correcta la opción A.

❖ Si $a = b = 1$ el producto escalar dado es el estándar.

❖ Si $a = b$ la elipse es la circunferencia de centro (0, 0) y radio a.

14. El vector unitario correspondiente al vector $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$ del conjunto $M_{2\times 2}$ del ejercicio 2 del capítulo 5-2 es: A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{2}{\sqrt{15}} \\ \frac{1}{\sqrt{15}} & \frac{-3}{\sqrt{15}} \end{pmatrix}$; D) $\frac{1}{\sqrt{15}} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}$.

Como $\left\|\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix}\right\| = \left|\sqrt{15}\right| \Rightarrow \frac{\bar{x}}{\|\bar{x}\|} = \frac{1}{\left|\sqrt{15}\right|}\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 1 & -3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\left|\sqrt{15}\right|} & \frac{2}{\left|\sqrt{15}\right|} \\ \frac{1}{\left|\sqrt{15}\right|} & \frac{-3}{\left|\sqrt{15}\right|} \end{pmatrix} \Rightarrow$ Son ciertas las opciones C y D.

Ejercicios relativos a:

"Sistemas ortogonales y ortonormales de vectores. Método de ortonormalización de Gram-Schmidt."

1. En un espacio vectorial euclídeo si la matriz de Gram es la matriz unitaria, I, podemos asegurar que la base de referencia es: A) Normada; B) Ortogonal; C) Es ortonormada; D) No tiene por qué ser ninguna de las anteriores.

❖ Sabemos que cada elemento g_{ij} de G es el producto escalar $\bar{e}_i \bullet \bar{e}_j$.

¿La base es ortonormal?.

Cuando la matriz métrica G es la matriz unitaria I se verifica que:

$\bar{e}_i \bullet \bar{e}_j = 0$ si $i \neq j \Leftrightarrow$ Cada vector $\bar{e}_i$ de la base es ortogonal a $\bar{e}_j \Rightarrow$ La base es ortogonal.

$\bar{e}_i \bullet \bar{e}_j = 1$ si $i = j \Leftrightarrow$ El cuadrado de la norma de cada vector es 1 $\Rightarrow$ Su norma también es 1 $\Rightarrow$ La base es normada.

Una base ortogonal y normada es ortonormada $\Rightarrow$ La base es ortonormada.

$\Rightarrow$ Son ciertas las opciones A, B y C.

❖ Como consecuencia, el producto escalar es el usual:

$$\bar{x} \bullet \bar{y} = (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n) \begin{pmatrix} g_{11} & g_{12} & \cdots & g_{1n} \\ g_{21} & g_{22} & \cdots & g_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ g_{n1} & g_{n2} & \cdots & g_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1 \quad x_2 \quad \cdots \quad x_n)\begin{pmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n.$$

2. Cuando en el espacio vectorial de polinomios reales de grado menor que tres con una indeterminada, x, del ejercicio 8 del capítulo 5-1 se consideran la base $B = \{\bar{e}_1 = 1, \bar{e}_2 = x, \bar{e}_3 = x^2\}$ y el producto escalar $P_1 \bullet P_2 = \int_{-1}^{1} P_1(x)P_2(x)dx$, es cierto que B cumple: A) Es ortogonal; B) Es ortonormal; C) Esta formada por vectores unitarios: D) No tiene ninguna de las características de opciones anteriores.

Como se vio en el ejercicio 8 de 5-1.

❖ Cada elemento g_{ij} de la matriz $G = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{pmatrix}$ es $\bar{e}_i \bullet \bar{e}_j$.

¿Es B una base ortogonal?.

Para que el sistema de vectores que forma la base B sea ortogonal (cada vector ortogonal a todos los demás) debe verificarse que $\bar{e}_i \bullet \bar{e}_j = 0$ si $i \neq j$, como eso no es cierto porque $g_{13} = g_{31} = \frac{2}{3} \Rightarrow$ La opción A es falsa.

¿Es B una base ortonormal?.

Para que el sistema de vectores que forma la base B sea ortonormal la matriz G debe ser la matriz unidad ⇒ La opción B es falsa.

❖ Como B no es ortogonal no puede ser ortonormal (ortogonal y de vectores unitarios).

¿Son unitarios los vectores de B?.

Un vector es unitario si su norma es 1, si esto ocurre se verifica $\bar{e}_i \bullet \bar{e}_i = 1$ y los elementos de la diagonal principal de G son 1, como no es así $\Rightarrow$ La opción **C** es falsa.

$\Rightarrow$ Es cierta la opción D.

3. Si el vector $\bar{x}$ de $\mathbb{R}^n$ es ortogonal a los vectores $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m$ de $\mathbb{R}^n$, entonces es ortogonal a: A) Cualquier subespacio de $\mathbb{R}^n$ que tenga $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m$ como parte de su base; B) Cualquier subespacio de $\mathbb{R}^n$ que tenga $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m\}$ como base; C) $\langle \bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m \rangle$; D) Ninguna de las anteriores.

$\bar{x}$ ortogonal a $\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \bar{x} \bullet \bar{u}_1 = 0 \\ \bar{x} \bullet \bar{u}_2 = 0 \\ \dots \\ \bar{x} \bullet \bar{u}_m = 0 \end{cases} \Rightarrow \alpha(\bar{x} \bullet \bar{u}_1) + \beta(\bar{x} \bullet \bar{u}_2) + \cdots + \lambda(\bar{x} \bullet \bar{u}_m) = 0.$$

Utilizando las propiedades del producto escalar la igualdad anterior equivale a $(\alpha\bar{x} \bullet \bar{u}_1) + (\beta\bar{x} \bullet \bar{u}_2) + \cdots + (\lambda\bar{x} \bullet \bar{u}_m) = 0$, es decir, $\bar{x} \bullet (\alpha\bar{u}_1 + \beta\bar{u}_2 + \cdots + \lambda\bar{u}_m) = 0$, que demuestra que es cierta la opción C.

Ejemplo:

En $\mathbb{R}^3$ {(0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1)} es generador de $\langle (0, 1, 0), (0, 0, 1), (0, 1, 1) \rangle$.

$$(1, 0, 0) \in \text{eje de las } x_1, \text{ y es ortogonal a } \begin{cases} (0,1,0) \in \text{ eje de las } x_2 \\ (0,0,1) \in \text{ eje de las } x_3 \\ (0,1,1) \in \text{ plano definido por } x_2 \text{ y } x_3 \end{cases} \Rightarrow$$

$(1, 0, 0) \in$ eje de las x_1, y es ortogonal a $\alpha(0, 1, 0) + \beta(0, 0, 1) + \gamma(0, 1, 1)$, que pertenece al plano definido por los ejes de las x_2 y las x_3.

Si $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m\}$ es base, necesariamente el espacio que genera es $\langle \bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m \rangle$ y estamos en la situación de la opción C $\Rightarrow$ La opción B es cierta.

Ejemplo:
En $\mathbb{R}^3$ $\{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ es base de $\langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle \Rightarrow \{(0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$ genera $\langle (0, 1, 0), (0, 0, 1) \rangle$.

$(1, 0, 0) \in$ eje de las x_1, es ortogonal a $\begin{cases} (0,1,0) \in \text{ eje de las } x_2 \\ (0,0,1) \in \text{ eje de las } x_3 \end{cases} \Rightarrow (1,0,0) \in$ eje de las x_1 es ortogonal a $\alpha(0, 1, 0) + \beta(0, 0, 1) \in$ plano definido por los ejes de las x_1 y las x_3.

Si $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m\}$ es parte de la base de un espacio, dicho espacio, en general, no será $\langle \bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_m \rangle$ y no hay ninguna razón para que $\bar{x}$ sea ortogonal al resto de los vectores $\Rightarrow$ A es falsa.

Ejemplo:

En $\mathbb{R}^3$ $\{(0, 1, 0)\}$ es parte de la base de $\langle (0, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$.

$(1, 0, 0)$, que pertenece al eje de las x_1, es ortogonal a $(0, 1, 0)$ que pertenece al eje de las x_2.

$(1, 0, 0)$, que pertenece al eje de las x_1, no es ortogonal a $(1, 0, 1)$.

$\Rightarrow (1, 0, 0)$ no es ortogonal a $\langle (0, 1, 0), (1, 0, 1) \rangle$.

4. Si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son dos vectores cualesquiera del espacio vectorial euclídeo $\mathbb{R}^2$ con la norma habitual, entonces el único vector no nulo ortogonal a ambos es el $\bar{0}$: A) Si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son linealmente dependientes; B) Si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son linealmente independientes; C) Siempre; D) Nunca.

Si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son linealmente dependientes en $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \bar{v} = \lambda\bar{u}$.

Si un vector $\bar{x}$ de $\mathbb{R}^2$ es no nulo y ortogonal a $\bar{u} \Rightarrow \bar{x} \bullet \bar{u} = 0$.

Si $\bar{x} \bullet \bar{u} = 0 \Rightarrow \bar{x} \bullet \bar{v} = \bar{x} \bullet (\lambda\bar{u}) = \lambda(\bar{x} \bullet \bar{u}) = \lambda 0 = 0$.

$\Rightarrow$ Si dos vectores de $\mathbb{R}^2$ son linealmente dependientes, cualquier vector ortogonal a uno lo es al otro $\Rightarrow$ Las opciones A y C son falsas.

Si $\bar{u}$ y $\bar{v}$ son linealmente independientes en $\mathbb{R}^2$ y $\bar{x}$ de $\mathbb{R}^2$ es no nulo y ortogonal a ambos $\Rightarrow \bar{x}$ es ortogonal a $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle$. Pero $\langle \bar{u}, \bar{v} \rangle = \mathbb{R}^2 \Rightarrow \bar{x}$ es ortogonal a todos los vectores de $\mathbb{R}^2 \Rightarrow \bar{x} = \bar{0}$ $\Rightarrow$ B y D son ciertas.

5. En un espacio vectorial euclídeo con una base dada, el método de Gram-Schmidt resuelve el problema de: A) Encontrar otra base que sea normada; B) Encontrar otra base que sea ortogonal; C) Encontrar otra base que sea ortonormada; D) Ninguna de las anteriores.

❖ El método de Gram-Schmidt consiste en obtener una base formada por vectores ortogonales, que después se normalizan $\Rightarrow$ Son correctas las opciones A, B y C.

6. Cualquier espacio vectorial euclídeo verifica: A) Puede no tener una base ortonormal; B) Puede tener más de una base ortonormal; C) En cualquier espacio euclídeo, $E, \forall \bar{v} \in E$ el vector $\left(\frac{1}{|\bar{v}|}\right)\bar{v}$ es unitario; D) Ninguna de las anteriores.

El método de Gram-Schmidt, permite obtener una única base $U = \{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_n\}$ formada por vectores ortogonales, que después se normalizan para formar la base $V = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n\} \Rightarrow$ La opción A es falsa.

Si $V = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n\}$ es una base ortonormal, también lo es $V = \{-\bar{v}_1, \bar{v}_2, ..., \bar{v}_n\} \Rightarrow$ La opción B es cierta.

La opción C es cierta porque $\left|\frac{1}{|\bar{v}|}\bar{v}\right| = \frac{1}{|\bar{v}|}|\bar{v}| = 1$ para cualquier vector $\bar{v} \in E$.

7. En $\mathbb{R}$ está definido el producto escalar "$\bullet$" usual y la base $B = \{3\}$ al aplicar el método de Gram-Schmidt se obtiene la base: A) $V = \{3\}$ B) $V = \{1\}$; C) $V = \{0\}$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Para entender los ejercicios relativos al método de Gram-Schmidt es necesario repasar sus fundamentos en el texto de teoría.

Primera fase: Búsqueda de una base, U, de vectores ortogonales generadora del mismo espacio que B:

Como B sólo tiene el vector $\bar{e} = 3$ no hay que buscar ninguno ortogonal a él.

Segunda fase: Normalización de los vectores de la base encontrada en la primera fase:
El vector $\bar{e} = 3$ no es normado porque su norma es $\left|\sqrt{3.3}\right| = 3 \Rightarrow$ Hay que normalizarlo, es decir, obtener un vector que genere el mismo subespacio y de norma 1, dicho vector es $\bar{u} = \frac{\bar{e}}{\|\bar{e}\|} = 1 \Rightarrow$ Sólo es cierta la opción B.

❖ Además de la base ortonormal, $V = \{1\}$, obtenida mediante el método de Gram-Schmidt, también es base ortonormal $V' = \{-1\}$.

8. Si en $\mathbb{R}^2$ está definido el producto escalar usual con la base $B = \{(1, 1), (0, 1)\}$, al aplicar el método de Gram-Schmidt se obtiene la base:
A) $V = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-2}{\sqrt{2}}, \frac{2}{\sqrt{2}}\right)\right\}$; B) $V = \{(1, 1), (-1, 1)\}$; C) $V = \{(1, 0), (0, 1$
D) Ninguna de las anteriores.

Primera fase: Búsqueda de una nueva base U ortogonal, que genera el mismo espacio que B, y tal que cada uno de sus vectores $\bar{u}_i$ se obtiene como la suma de $\bar{e}_i \in B$ más un vector del espacio vectorial generado por $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, \ldots, \bar{u}_{i-1}\}$.

¿Primer vector de la base ortogonal buscada?.

$\bar{u}_1 = \bar{e}_1 = (1,1)$

$\bar{u}_i$ genera el mismo subespacio que $\bar{e}_i$.

¿Segundo vector de la base ortogonal buscada?.

$$\bar{u}_2 = \bar{e}_2 + \alpha\bar{u}_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \alpha \\ 1+\alpha \end{pmatrix}.$$

$\bar{u}_2$ se ha descompuesto en suma de dos vectores: Uno es $\bar{e}_2$ y otro es del subespacio generado por $\bar{u}_1$.

¿Qué valor debe tener α para que los vectores $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ sean ortogonales?.

Debe ser $\bar{u}_1 \bullet \bar{u}_2 = 0$.

$$\bar{u}_1 \bullet \bar{u}_2 = (1,1) \bullet (\alpha, 1+\alpha) = \alpha + 1 + \alpha = 0 \Rightarrow \alpha = \frac{-1}{2}.$$

$$\Rightarrow \bar{u}_1 = (1,1);\ \bar{u}_2 = \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right) \Rightarrow \left\{(1,1), \left(\frac{-1}{2}, \frac{1}{2}\right)\right\} \text{ es una base ortogonal.}$$

Segunda fase: Búsqueda de una base *V* ortonormal, que genera el mismo espacio que *B* y *U*.

Normalización de los vectores de la base encontrada:

$$\left\|\bar{u}_1\right\| = \sqrt{\bar{u}_1 \bullet \bar{u}_1} = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{2}.$$

$$\left\|\bar{u}_2\right\| = \sqrt{\bar{u}_2 \bullet \bar{u}_2} = \sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{2}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2}.$$

Por tanto, la base ortonormada está formada por los vectores:

$$\bar{v}_1 = \frac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right),\ \bar{v}_2 = \frac{\bar{u}_2}{\|\bar{u}_2\|} = \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right).$$

$$V = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$$

$\Rightarrow$ Sólo es correcta la opción D.

9. En $\mathbb{R}^3$ está definido el producto escalar usual con la base $B = \{(1, 1, 0), (1, 1, 1), (0, 1, 1)\}$, al aplicar el método de Gram-Schmidt se obtiene la base: A) $\left\{\left(\frac{\sqrt{2}}{2}, 0, 0\right), \left(0, \frac{\sqrt{2}}{2}, 0\right), \left(0, 0, \frac{\sqrt{2}}{2}\right)\right\}$;

B) $\{(1, 0, 0), (0, 1, 0), (0, 0, 1)\}$; C) $\left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0, 0, 1), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\}$;

D) Ninguna de las anteriores.

Primera fase: Búsqueda de una nueva base U ortogonal, que genera el mismo espacio que B, y tal que cada uno de sus vectores $\bar{u}_i$ se obtiene como la suma de $\bar{e}_i \in B$ más un vector del espacio vectorial generado por $\{\bar{u}_1, \bar{u}_2, ..., \bar{u}_{i-1}\}$.

¿Primer vector de la base ortogonal buscada?.

$$\bar{u}_1 = \bar{e}_1 = (1,1,0)$$

¿Segundo vector de la base ortogonal buscada?.

$$\bar{u}_2 = \bar{e}_2 + \alpha\bar{u}_1 = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \alpha\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1+\alpha\\1+\alpha\\1\end{pmatrix}$$

¿Tercer vector de la base ortogonal buscada?.

$$\bar{u}_3 = \bar{e}_3 + \beta_1\bar{u}_1 + \beta_2\bar{u}_2 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \beta_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}1+\alpha\\1+\alpha\\1\end{pmatrix}$$

Los vectores obtenidos deben ser ortogonales dos a dos.

¿Qué valor debe tener α para que los vectores $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_2$ sean ortogonales?.

Debe ser $\bar{u}_1 \bullet \bar{u}_2 = 0$.

$\bar{u}_1 \bullet \bar{u}_2 = (1,1,0)\bullet(1+\alpha,1+\alpha,1) = 1+\alpha+1+\alpha = 0 \Rightarrow \alpha = -1.$

$\Rightarrow \bar{u}_2 = (1+\alpha,1+\alpha,1) = (0,0,1)$

¿Qué valores deben tener β_1 y β_2 para que los vectores $\bar{u}_1$ y $\bar{u}_3$ sean ortogonales y también lo sean $\bar{u}_2$ y $\bar{u}_3$?.

Sustituyendo los valores obtenidos para los otros vectores podemos expresar

$$\bar{u}_3 = \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \beta_1\begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \beta_2\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\beta_1\\1+\beta_1\\1+\beta_2\end{pmatrix}$$

$$\bar{u}_1 \bullet \bar{u}_3 = 0 \Leftrightarrow (1,1,0)\bullet(\beta_1,1+\beta_1,1+\beta_2) = 0 \Rightarrow \beta_1 + 1 + \beta_1 = 0 \Rightarrow \beta_1 = \frac{-1}{2}.$$

$$\bar{u}_2 \bullet \bar{u}_3 = 0 \Leftrightarrow (0,0,1)\bullet(\beta_1,1+\beta_1,1+\beta_2) = 0 \Rightarrow 1+\beta_2 = 0 \Rightarrow \beta_2 = -1.$$

$$\bar{u}_3 = (\beta_1,1+\beta_1,1+\beta_2) = \left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},0\right).$$

La base $U = \left\{(1,1,0),(0,0,1),\left(\frac{-1}{2},\frac{1}{2},0\right)\right\}$ es una base ortogonal.

Segunda fase: Búsqueda de una base V ortonormal, que genera el mismo espacio que B y U.

Normalización de los vectores de la base encontrada:

$$\|\bar{u}_1\| = \left|\sqrt{\bar{u}_1 \bullet \bar{u}_1}\right| = \left|\sqrt{1^2 + 1^2 + 0^2}\right| = \left|\sqrt{2}\right|.$$

$$\|\bar{u}_2\| = \left|\sqrt{\bar{u}_2 \bullet \bar{u}_2}\right| = \left|\sqrt{0^2 + 0^2 + 1^2}\right| = \left|\sqrt{1}\right| = 1.$$

$$\|\bar{u}_3\| = \left|\sqrt{\bar{u}_3 \bullet \bar{u}_3}\right| = \left|\sqrt{\left(\frac{-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 + 0^2}\right| = \left|\sqrt{\frac{2}{4}}\right| = \left|\frac{\sqrt{2}}{2}\right|.$$

Por tanto, la base ortonormada está formada por los vectores:

$$\bar{v}_1 = \frac{\bar{u}_1}{\|\bar{u}_1\|} = \left(\frac{1}{\left|\sqrt{2}\right|}, \frac{1}{\left|\sqrt{2}\right|}, 0\right).$$

$$\bar{v}_2 = \frac{\bar{u}_2}{\|\bar{u}_2\|} = (0,0,1).$$

$$\bar{v}_3 = \frac{\bar{u}_3}{\|\bar{u}_3\|} = \left(\frac{-1}{\left|\sqrt{2}\right|}, \frac{1}{\left|\sqrt{2}\right|}, 0\right).$$

❖ Normalmente para referirnos al valor positivo de una raíz cuadrada no es necesario indicar que es el valor absoluto, por lo que sería correcto escribir:

$$V = \{\bar{v}_1, \bar{v}_2, \bar{v}_3\} = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right), (0,0,1), \left(\frac{-1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right)\right\}$$

⇒ Es correcta la opción C.

❖ Para indicar un producto escalar se utilizan distintos símbolos, y es muy frecuente el uso de "·" para el producto escalar estándar en $\mathbb{R}^n$. En este libro, con la intención de aportar mayor claridad, hemos utilizado "•" para indicar un producto escalar cualquiera, sin diferenciar el estándar.

Ejercicios relativos a:

"Subespacios ortogonales, subespacios ortogonales complementarios y matrices ortogonales."

1. El conjunto de soluciones del sistema de ecuaciones $x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0$; $x_1 + x_3 + x_4 = 0$; $x_2 + x_3 = 0$ es: A) Un subespacio ortogonal a $\langle(1,1,1,1), (1,0,1,1), (0,1,1,0)\rangle$; B) Un subespacio de $\mathbb{R}^4$ de dimensión dos; C) $\{(0,0,0,0)\}$; D) Ninguna de las anteriores.

Como no se hace referencia a otro producto escalar utilizaremos el estándar.

Los vectores (x_1, x_2, x_3, x_4) de $\mathbb{R}^4$ que son solución del sistema dado satisfacen cada una de sus ecuaciones:

$x_1 + x_2 + x_3 + x_4 = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) \bullet (1,1,1,1) = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$ es ortogonal a $(1,1,1,1)$.

$x_1 + x_3 + x_4 = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) \bullet (1,0,1,1) = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$ es ortogonal a $(1,0,1,1)$.

$x_2 + x_3 = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4) \bullet (0,1,1,0) = 0 \Leftrightarrow (x_1, x_2, x_3, x_4)$ es ortogonal a $(0,1,1,0)$.

$\Rightarrow$ El conjunto de soluciones del sistema dado es ortogonal a $\langle(1,1,1,1), (1,0,1,1), (0,1,1,0)\rangle \Rightarrow$ Es correcta la opción A.

¿Soluciones del sistema dado?.

De la tercera ecuación del sistema se deduce que $x_2 = -x_3$.

Sustituyendo en la primera, el sistema se transforma en

$$\begin{cases} x_1 + x_4 = 0 \\ x_1 + x_3 + x_4 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = -x_4 \\ x_3 = 0 \end{cases}$$

Una expresión paramétrica del subespacio de soluciones del sistema es $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix}$. La dimensión del subespacio es uno = Número de parámetros.

$\Rightarrow$ B y C son falsas.

2. Si $L_1 = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 - x_2 = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y L_2 es un subespacio ortogonal a L_1 (con el producto escalar estándar), entonces L_2 tiene como base: A) $\{(1,1,0)\}$; B) $\{(1,1,0), (1,-1,0)\}$; C) $\{(1,-1, 0)\}$; D) Ninguno de los conjuntos anteriores.

❖ Los vectores de L_1 tienen iguales las dos primeras coordenadas (un parámetro α), la tercera puede tomar cualquier valor igual al anterior o diferente (un parámetro β).

¿Ecuaciones paramétricas de L_1?.

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \alpha \\ x_3 = \beta \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

¿Qué condiciones deben cumplir los vectores de L_2?.

Cualquier vector de L_2 debe ser ortogonal a todos los vectores de L_1, para ello es suficiente que lo sea a los vectores de una cualquiera de sus bases, en particular a (1,1,0) y a (0,0,1), ya que $\{(1,1,0), (0,0,1)\}$ es una base de L_1.

Si $(x_1, x_2, x_3) \in L_2$ debe verificar $\begin{cases} (x_1, x_2, x_3) \bullet (1,1,0) = 0 \\ (x_1, x_2, x_3) \bullet (0,0,1) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} 1x_1 + 1x_2 = 0 \\ 1x_3 = 0 \end{cases}$.

¿Se puede encontrar una base de L_2?.

Las ecuaciones paramétricas de L_2 son $\begin{cases} x_1 = x_1 \\ x_2 = -x_1 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \lambda \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow \{(1,-1,0)\}$ es una base del subespacio L_2.

L_2 es la recta de ecuaciones $x_1 = \lambda$; $x_2 = -\lambda$; $x_3 = 0$. (Pasa por el origen y tiene como vector director (1,–1,0), que es una base de dicho subespacio).

$\Rightarrow$ Sólo es correcta la opción C.

3. En las condiciones del ejercicio anterior hay bases B_1 de L_1 y B_2 de L_2 que verifican: A) $B_1 \cup B_2$ es base de $\mathbb{R}^3$; B) $B_1 \cap B_2 = \{(0,0,0)\}$; C) $B_1 \cap B_2 = \varnothing$; D) $B_1 \subset B_2$.

❖ Cuando la pregunta realizada es *"¿existe algo?"*, una forma contundente de demostrar que sí existe es encontrarlo.

En el ejercicio anterior hemos obtenido las bases $B_1 = \{(1,1,0), (0,0,1)\}$ de L_1 y $B_2 = \{(1,-1,0))\}$ de L_2.

¿$B_1 \cup B_2 = \{(1,1,0), (1,-1,0), (0,0,1)\}$es una base de $\mathbb{R}^3$?.

Para comprobarlo es suficiente ver que son tres vectores linealmente independientes:

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \{(1,1,0),(1,-1,0),(0,0,1)\} \text{ es base de } \mathbb{R}^3 \Rightarrow \text{A es correcta.}$$

La opción B es falsa porque (0,0,0) no puede formar parte de ninguna base por ser dependiente de cualquier conjunto de vectores.

Para ver si la opción C es verdadera, o falsa, razonaremos por reducción al absurdo:

Si $B_1 \cap B_2 \neq \varnothing$, habría algún vector $\overline{u}$ que perteneciera a las dos bases, y por tanto, tendría que ser ortogonal a sí mismo, es decir $\overline{u} \bullet \overline{u} = 0$.

Uno de los axiomas de producto escalar es que $\overline{u} \bullet \overline{u} = 0$ sólo es posible si $\overline{u} = 0$.

Como $\overline{0}$ no puede pertenecer a $B_1 \cap B_2 \Rightarrow B_1 \cap B_2 = \varnothing$.

$\Rightarrow$ La opción C es verdadera.

Si $B_1 \cap B_2 = \varnothing$ y $B_1 \subset B_2 \Rightarrow B_1 = \varnothing$, que es falso porque $B_1 = \{(1,1,0), (0,0,1)\}$.
$\Rightarrow$ La opción D es falsa.

4. En las condiciones de los dos ejercicios anteriores se verifica: A) L_2 es único; B) $L_1 + L_2$ es suma directa; C) Hay vectores ortogonales a L_1 que no están en L_2; D) L_2 es el complementario ortogonal de L_1.

Hemos visto en el ejercicio anterior que L_2 es la recta de ecuaciones cartesianas $x_1 = \lambda$; $x_2 = -\lambda$; $x_3 = 0$, dicha recta es única $\Rightarrow$ La opción A es correcta.

¿Qué vectores forman $L_1 \cap L_2$?.

Los vectores de $L_1 \cap L_2$ pertenecen a L_1 y a L_2, es decir verifican las ecuaciones de ambos.

$$(x_1,\ x_2,\ x_3) \in L_1 \cap L_2 \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_2 = 0 \\ 1x_1 + 1x_2 = 0 \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (0,0,0) \Rightarrow \\ 1x_3 = 0 \end{cases}$$ Por ser

$L_1 + L_2 = \mathbb{R}^3$, $L_1 + L_2$ es suma directa y la opción B es cierta.

¿Hay vectores ortogonales a L_1 que no están en L_2?.

Todos los vectores ortogonales a L_1 están en L_2, como L_2 es único no hay más vectores ortogonales a L_1 que los que hay en $L_2 \Rightarrow$ C es falsa.

¿Es L_2 complementario ortogonal de L_1?.

Para que ambos subespacios sean complementarios ortogonales se debe cumplir que L_2 sea ortogonal a L_1, y que la suma de sus dimensiones sea la dimensión del espacio.

La primera condición está comprobada en el apartado anterior, y la segunda es evidente porque se trata de una suma directa.

Como se cumplen ambas condiciones, $L_2 = L_1^{\perp} \Rightarrow$ La opción D es cierta.

❖ La demostración de la segunda condición también se puede hacer sabiendo que la base de L_1 tiene 2 vectores y la base de L_2 tiene 1 vector, es decir, dimensión de $L_1 = 2$ y dimensión de $L_2 = 1$, luego es cierto que:

Dimensión de $\mathbb{R}^3$ = Dimensión de L_1 + Dimensión de L_2.

5. Si $L_1 = \{(x_1, x_2, x_3)/x_1 = x_2 = 0\}$ es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ y L_2 es un subespacio propio de $\mathbb{R}^3$, ortogonal a L_1 (con el producto escalar estándar), entonces L_2 puede tener como elementos de una base: A) {(1,1,0)}; B) {(1,0,0)}; C) {(0,1,0)}; D) Ninguno de los conjuntos anteriores.

Los vectores de L_1 tienen las dos primeras coordenadas nulas, la tercera puede tomar cualquier valor igual al anterior o diferente (un parámetro α).

¿Ecuaciones paramétricas de L_1?.

$$\begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_3 = \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

¿Qué condiciones deben cumplir los vectores de L_2?.

Cualquier vector de L_2 debe ser ortogonal a todos los vectores de L_1, para ello es suficiente que lo sea a los vectores de una cualquiera de sus bases, en particular a (0,0,1), ya que {(0,0,1)} es una base de L_1.

Si $(x_1, x_2, x_3) \in L_2$, debe verificar $(x_1, x_2, x_3) \bullet (0,0,1) = 0 \Rightarrow x_3 = 0$.

¿Se puede encontrar una base de L_2?.

Unas ecuaciones paramétricas del plano $x_3 = 0$ son

$$\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = \beta \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix},$$ siendo α y β valores reales cualesquiera.

Como $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$ es un sistema linealmente independiente, además de generador de $L_2 \Rightarrow \{(1,0,0), (0,1,0)\}$ es una base del subespacio L_2.

¿Hay más subespacios de $\mathbb{R}^3$ que sean ortogonales a L_1?.

Cualquier subespacio de L_2 es un subespacio de $\mathbb{R}^3$, y es ortogonal a L_1 porque verifica las ecuaciones de L_2.

Sabemos que son subespacios propios (distintos de sí mismo y $\{\overline{0}\}$) de L_2 las rectas que pasan por el origen y están contenidas en $L_2 \Rightarrow$ Son subespacios ortogonales a L_1 las rectas del plano $x_3 = 0$ que pasan por el origen.

¿Qué subespacio se genera en la opción A?.

La recta de ecuación $\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, que pasa por el origen y tiene por base $\{(1,1,0)\}$, que está contenida en el plano $x_3 = 0 \Rightarrow$ Es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ ortogonal a L_1.

¿Qué subespacio se genera en la opción B?.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $\beta = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ es el eje de las x_1, una de cuyas bases es $\{(1,0,0)\}$ y está contenido en $x_3 = 0 \Rightarrow$ Es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ ortogonal a L_1.

¿Qué subespacio se genera en la opción C?.

$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \alpha \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ cuando $\alpha = 0 \Rightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \beta \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, es el eje de las x_2, una de cuyas bases es $\{(0,1,0)\}$ y está contenido en $x_3 = 0 \Rightarrow$ Es un subespacio de $\mathbb{R}^3$ ortogonal a L_1.

$\Rightarrow$ Son correctas las opciones A, B y C.

6. En las condiciones del ejercicio anterior se verifica: A) El subespacio ortogonal a L_1 es único; B) En cualquiera de los subespacios ortogonales a L_1 existe una base, tal que su unión con la base B_1 de L_1 es base de $\mathbb{R}^3$; C) La suma de L_1 con cualquiera de los subespacios a los que es ortogonal es suma directa; D) Cualquier subespacio ortogonal de L_1 es su complementario ortogonal.

Vimos en el ejercicio anterior que además del subespacio L_2 son subespacios ortogonales a L_1 las rectas del plano $x_3 = 0$ que pasan por el origen $\Rightarrow$ La opción A es falsa.

También se vio que $\{(0,0,1)\}$ es una base de L_1 y que el subespacio que forma el eje de las x_1 es ortogonal a L_1, y $\{(1,0,0)\}$ es una de sus bases.

La unión de una base de L_1 y una base del subespacio que forma el eje de las x_1 tiene dos vectores $\Rightarrow$ No puede ser base de $\mathbb{R}^3$, ya que las bases de $\mathbb{R}^3$ tienen que tener tres vectores $\Rightarrow$ La opción B es falsa.

¿Qué vectores forman la intersección de L_1 y con cualquiera de los subespacios a los que es ortogonal?.

Cualquier vector de un subespacio ortogonal a L_1 está en L_2, y por tanto cumple sus ecuaciones. (Además puede tener que cumplir otras condiciones, o no).

Los vectores de la intersección verifican las ecuaciones de L_1 y del subespacio ortogonal: $\begin{cases} x_1 = x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow (x_1, x_2, x_3) = (0,0.0).$

¿La suma de L_1 con cualquiera de los subespacios a los que es ortogonal es directa?.

❖ Para que la suma de dos subespacios de $\mathbb{R}^3$ sea directa es necesario que la suma de sus dimensiones sea tres, además de que su intersección sea $\{(0,0,0)\}$.

Es evidente que de entre los subespacios ortogonales a L_1 todos cumplen la condición de la intersección, pero sólo L_2 cumple ambas condiciones $\Rightarrow$ Las opciones C y D son falsas.

7. Si $U = \{(a, a, b, b) \in \mathbb{R}^4\}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, el subespacio $U^{\perp}$, complementario ortogonal a U, verifica: A) $(1,-1, b,-b)$ pertenece a $U^{\perp}$; B) $(1,-1, b,-b)$ es el único que pertenece a $U^{\perp}$; C) (0,0,0,0) pertenece a $U^{\perp}$; D) Ninguna de las anteriores respuestas es correcta. (Con el producto escalar estándar en $\mathbb{R}^4$)

¿Qué vectores de $\mathbb{R}^4$ son ortogonales a los vectores de la forma (a, a, b, b)?.

Todos los vectores (x_1, x_2, x_3, x_4) de $\mathbb{R}^4$ que verifican $(x_1, x_2, x_3, x_4) \bullet (a, a, b, b) = 0$.

$(x_1, x_2, x_3, x_4) \bullet (a, a, b, b) = ax_1 + ax_2 + bx_3 + bx_4 = 0 \Leftrightarrow a(x_1 + x_2) + b(x_3 + x_4) = 0.$

Como a y b son números reales cualesquiera, para que se verifique $a(x_1 + x_2) + b(x_3 + x_4) = 0$ es necesario que $x_1 + x_2 = x_3 + x_4 = 0$, es decir, las ecuaciones paramétricas de $U^{\perp}$ son $\begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = -\alpha \\ x_3 = \beta \\ x_4 = -\beta \end{cases}$.

Hay infinitos vectores de $\mathbb{R}^4$ que cumplen la condición anterior, entre otros $(1, -1, b, -b)$ y (0,0,0,0), que pertenece a cualquier subespacio vectorial.

$\Rightarrow$ Sólo son correctas la opciones A y C

8. Si en el conjunto de las matrices reales cuadradas de orden dos, $M_{2\times2}$, se define el producto escalar $\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = a_{11}b_{11} + a_{12}b_{12} + a_{21}b_{21} + a_{22}b_{22}$, y el subconjunto L_1 formado las matrices diagonales, es cierto que el complementario ortogonal de L_1 es: A) El subespacio de $M_{2\times2}$ de las matrices simétricas; B) El subespacio de $M_{2\times2}$ formado por las matrices cuya diagonal principal es nula; C) El subespacio de $M_{2\times2}$ formado por las matrices cuya diagonal secundaria es nula; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Los vectores de $M_{2\times2}$ que forman el subespacio L_1 son de la forma $\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix}$.

❖ El complementario ortogonal de L_1 está formado por todos los vectores de $M_{2\times2}$ que son ortogonales a L_1.

¿Qué vectores de $M_{2\times2}$ forman $L_1^{\perp}$?.

$$L_1^{\perp} = \left\{ \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} \right\}, \text{ tales que } \begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = 0.$$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & 0 \\ 0 & a_{22} \end{pmatrix} \bullet \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} \\ x_{21} & x_{22} \end{pmatrix} = a_{11}x_{11} + 0x_{12} + 0x_{21} + a_{22}x_{22} = 0.$$

$\Rightarrow$ Para que la expresión $a_{11}x_{11} + a_{22}x_{22}$ sea 0 para valores cualesquiera de a_{11} y a_{22}, es necesario que $x_{11} = x_{22} = 0 \Rightarrow$ Sólo es correcta la opción B.

9. Si en el espacio vectorial de polinomios con una indeterminada, x, reales de grado menor que cuatro se define el producto escalar $P_1 \bullet P_2 = \int_{-1}^{1} P_1(x)P_2(x)dx$, el complementario ortogonal al subespacio que forman las constantes es: A) $\{a_0 - 3a_0x^2\}$; B) $\{a_1x - a_3x^3\}$; C) $\{a_0 + a_1x - 3a_0x^2 + a_3x^3\}$; D) Ninguno de los anteriores.

❖ Los vectores de este espacio vectorial son polinomios de la forma $a_0 + a_1x + a_2x_2 + a_3x^3$ con a_0, a_1, a_2 y a_3 reales.

❖ Los vectores del subespacio L_1 de polinomios constantes son de la forma $P = k$, siendo k un número real cualquiera.

¿Qué polinomios de la forma $a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3$ *forman* $L_1^{\perp}$ *?.*

$$L_1^{\perp} = \{(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)\}, \text{ tales que } k \bullet (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = 0.$$

$$k \bullet (a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \int_{-1}^{1} k(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3)dx =$$

$$= \left[ka_0x + \frac{ka_1x^2}{2} + \frac{ka_2x^3}{3} + \frac{ka_3x^4}{4} \right]_{-1}^{1} = 2ka_0 + 2\frac{ka_2}{3} = 2k\left(a_0 + \frac{a_2}{3} \right) = 0.$$

Como k puede tener cualquier valor real, es necesario que $a_0 + \frac{a_2}{3} = 0$ para que $2k\left(a_0 + \frac{a_2}{3} \right)$ sea $0 \Rightarrow L_1^{\perp}$ estará formado por aquellos polinomios del espacio que cumplan $a_0 + \frac{a_2}{3} = 0$, es decir $-3a_0 = a_2$.

Es evidente que la opción B es falsa.

Los vectores definidos en la opción A verifican la condición $-3a_0 = a_2$, pero no son todos los vectores que la verifican, y por tanto no son el complementario ortogonal, sino una parte.

Los vectores definidos en la opción C son todos los que verifican la condición $-3a_0 = a_2 \Rightarrow$Sólo es correcta la opción C.

10. Dadas las bases $B = \{(1,0), (0,1)\}$ y $B' = \left\{\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right), \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\}$ en $\mathbb{R}^2$, y el producto escalar estándar, es cierto que la matriz $Q_{B'B}$ de cambio para pasar de las coordenadas de un vector cualquiera respecto a B' a las coordenadas respecto a B es: A) $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$; B) La inversa de $Q_{B'B}$ es $\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix}$; C) $Q_{B'B}$ es ortogonal; D) $Q_{B'B}$ es ortonormal.

¿Matriz $Q_{B'B}$?.

$(\mathbb{R}^2, B') \xrightarrow{i} (\mathbb{R}^2, B)$.

$(1,0)_{B'} \longrightarrow \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_B$; $(0,1)_{B'} \longrightarrow \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)_B$.

$Q_{B'B} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow$ Es correcta la opción A.

¿Matriz $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ inversa de $Q_{B'B}$?.

$$\begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & -\frac{1}{\sqrt{2}} \\ \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{c}{\sqrt{2}} = 1 \\ \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \text{ y } \begin{cases} \frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{d}{\sqrt{2}} = 0 \\ \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{d}{\sqrt{2}} = 1 \end{cases}$$

$$\begin{cases} \frac{a}{\sqrt{2}} - \frac{c}{\sqrt{2}} = 1 \\ \frac{a}{\sqrt{2}} + \frac{c}{\sqrt{2}} = 0 \end{cases} \Rightarrow a = -c = \frac{1}{\sqrt{2}} \text{ y } \begin{cases} \frac{b}{\sqrt{2}} - \frac{d}{\sqrt{2}} = 0 \\ \frac{b}{\sqrt{2}} + \frac{d}{\sqrt{2}} = 1 \end{cases} \Rightarrow b = d = \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{2}} \end{pmatrix} \Rightarrow$$ Es correcta la opción B.

¿Es ortogonal la matriz $Q_{B'B}$?.

El sistema de vectores que forman sus columnas es ortogonal porque

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \bullet \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = -\frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 0 \Rightarrow$$ La opción C es cierta.

❖ Otra forma de definir matriz ortogonal es: "Su inversa es igual a su traspuesta", que naturalmente esta matriz verifica.

¿Es ortonormal la matriz $Q_{B'B}$?.

Los vectores que forman sus columnas además de ser ortogonales son unitarios, porque su norma es 1:

$$\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \bullet \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow \left\|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\| = \left|\sqrt{1}\right| =$$

$$\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) \bullet \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right) = \left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)\left(-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{1}{2} + \frac{1}{2} = 1 \Rightarrow$$

$$\left\|\left(\frac{1}{\sqrt{2}}, \frac{1}{\sqrt{2}}\right)\right\| = \left|\sqrt{1}\right| = 1.$$

$\Rightarrow$ La opción D es cierta.

❖ Las bases B y B' dadas en $\mathbb{R}^2$ son ortonormales, y la matriz $Q_{B'B}$ del cambio de base es ortogonal.

❖ Se puede demostrar que la matriz que transforma una base ortonormada en otra base ortonormada de un espacio vectorial finito es una matriz ortogonal.

11. Si la matriz $A=\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ es ortogonal, se verifica: A) $a^2 + b^2 = 1$; B) $a^2 + b^2 + c^2 + d^2 = 1$; C) $ac + bd = 1$; D) No es cierta ninguna de las expresiones anteriores.

❖ A es ortogonal $\Leftrightarrow$ Su inversa es igual a su traspuesta, y por tanto

$$AA^t = I \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \Rightarrow a^2 + b^2 = 1;\ ac + bd = 0;\ c^2 + d^2 = 1$$

$\Rightarrow$ Sólo es cierta la opción A.

12. Si la matriz $\begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & a & x \\ 1/2 & 1/6 & b & y \\ 1/2 & 1/2 & 0 & z \\ 1/2 & -5/6 & 0 & t \end{pmatrix}$ es ortogonal, es cierto que

A) $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{6}$ y $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{2}$; B) $t = \pm\frac{\sqrt{2}}{6}$ y $x = \pm\frac{\sqrt{2}}{3}$; C) t y x no se pueden calcular; D) t y x pueden tener cualquier valor real .

Como la matriz dada es ortogonal, el producto por su traspuesta es la matriz unidad:

$$\begin{pmatrix} 1/2 & 1/6 & a & x \\ 1/2 & 1/6 & b & y \\ 1/2 & 1/2 & 0 & z \\ 1/2 & -5/6 & 0 & t \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/6 & 1/6 & 1/2 & -5/6 \\ a & b & 0 & 0 \\ x & y & z & t \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

Cada elemento de I es el producto de una fila de la primera matriz por una columna de la segunda.

El elemento de I que ocupa la fila 4, columna 4 es el producto

$$(1/2,-5/6.0.t)\begin{pmatrix}1/2\\-5/6\\0\\t\end{pmatrix}=1\Rightarrow t=\pm\frac{\sqrt{2}}{6}\Rightarrow \text{ La opción D es falsa.}$$

Si sustituimos t por uno de sus dos valores, por ejemplo por el positivo, el elemento de I que ocupa la fila 1, columna 4 es el producto

$$(1/2,1/6,a,x)\begin{pmatrix}1/2\\-5/6\\0\\\sqrt{2}/6\end{pmatrix}=0\Rightarrow x=\frac{-\sqrt{2}}{3}\Rightarrow \text{A es falsa.}$$

Si sustituimos t por el valor negativo, el elemento de I que ocupa la fila 1, columna 4 es el producto $(1/2,1/6,a,x)\begin{pmatrix}1/2\\-5/6\\0\\-\sqrt{2}/6\end{pmatrix}=0\Rightarrow x=\frac{\sqrt{2}}{3}$.

$\Rightarrow$ Son posibles los valores $t=\pm\frac{\sqrt{2}}{6}$ y $x=\pm\frac{\sqrt{2}}{3}\Rightarrow$ Es correcta la opción B.

$\Rightarrow$ La opción C es falsa porque t y x se pueden calcular.

CAPÍTULO 6

MATRICES SEMEJANTES

Ejercicios relativos a:

"Matrices semejantes, matrices equivalentes y matrices congruentes."

1. Sean A y B dos matrices cuadradas tales que $\text{rg}(A) = r$ y $\text{rg}(B) = s$. Si A y B son congruentes, entonces: A) $r = s$; B) Son equivalentes; C) $r \neq s$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Dos matrices A y B son equivalentes si y sólo si existen dos matrices regulares M y N tales que $A = MBN$.

❖ Dos matrices A y B de orden n son congruentes si y sólo existe una matriz regular P tal que $A = P^tBP$.

¿Son equivalentes?.

Como consecuencia de las definiciones anteriores, si A y B son congruentes, entonces son equivalentes (basta tomar $M = P$ y $N = P^t$) $\Rightarrow$ B es cierta y D falsa.

Como, además,

❖ Dos matrices A y B son equivalentes si y sólo si los rangos coinciden.

$\Rightarrow$ A es cierta y C es falsa.

2. Si A y $B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$ son dos matrices congruentes mediante $P=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ entonces A es: A) $\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

Si se impone la condición $A = P^tBP$ resulta:

$$A=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}^t\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0 & 1\\ 1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}4 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}\Rightarrow \text{C es cierta.}$$

3. Si $A=\begin{pmatrix}3 & 3 & 4\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}3 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2\end{pmatrix}$, entonces: A) Son equivalentes y congruentes; B) Son equivalentes y semejantes; C) Son equivalentes pero no congruentes; D) Son equivalentes pero no semejantes; E) No son equivalentes.

¿Son congruentes?.

Para que dos matrices sean congruentes deben ser cuadradas. Como A y B no son cuadradas, no pueden ser congruentes $\Rightarrow$ La opción A es falsa.

¿Son semejantes?.

Para que dos matrices sean semejantes deben ser cuadradas. Como A y B no son cuadradas, no pueden ser congruentes $\Rightarrow$ La opción B es falsa.

¿Son equivalentes?.

Sabemos que dos matrices son equivalentes es decir que sus rangos coinciden. A tiene rango 2 porque el determinante de la submatriz formada por la intersec-

ción de las dos primeras filas y columnas es distinta de 0. El rango de B es también dos por la misma razón $\Rightarrow$ Son equivalentes $\Rightarrow$ C y D son ciertas, E es falsa.

¿Se pueden encontrar M y N que verifiquen A = MBN?.

M y N son matrices regulares de orden 2 y 3 respectivamente para poder hacer la multiplicación, por ejemplo: $\begin{pmatrix} 3 & 3 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 3 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$.

4. A es una matriz cuadrada de orden 2 que es semejante a la matriz $\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$, entonces: A) $\det(A) = 1$; B) $\det(A) = -2$; C) $\det(A) = 0$; D) $\det(A)$ no se puede calcular.

❖ Dos matrices A y B de orden n son semejantes si y sólo existe una matriz regular P tal que $A = P^{-1}BP$; P se llama matriz de paso.

Con las condiciones del problema, tenemos:

$$A = P^{-1}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}P \Rightarrow \det(A) = \det(P^{-1})\det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\det(P).$$

Como $\det(P^{-1}) = 1/\det(P)$, entonces $\det(A) = \det\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} = -2$.

$\Rightarrow$ B es cierta y A, C y D son falsas.

5. Si A y B son dos matrices semejantes, entonces: A) A es la única matriz semejante a B; B) B tiene infinitas matrices semejantes distintas de A; C) Si C es semejante a B, entonces también es semejante a A; D) A, B y C son falsas.

Como A y B son semejantes existe una matriz regular P tal que $A = P^{-1}BP$.

Consideramos una matriz regular cualquiera M del mismo orden que A. Si se multiplica por M, por la derecha, la expresión anterior resulta $AM = P^{-1}BPM$. Si se multiplica por la izquierda por M^{-1}, se obtiene: $M^{-1}AM = M^{-1}P^{-1}BPM$.

Como $M^{-1}P^{-1} = (PM)^{-1}$, denotando $C = M^{-1}AM$, y $PM = Q$, la expresión anterior se puede escribir como $C = Q^{-1}BQ \Rightarrow C$ es semejante a $B \Rightarrow$ B es cierta y A falsa.

❖ La relación de semejanza entre matrices es una relación de equivalencia. Las relaciones de equivalencia tienen la propiedad transitiva:

❖ Si A semejante a B, y B semejante a C, A es semejante a $C \Rightarrow$ C es cierta.

6. Si A es una matriz cuadrada tal que $A = P^{-1}BP$, P una matriz regular y $B = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$, entonces: A) A y B son semejantes; B) A es diagonalizable: C) A y B son equivalentes; D) Si $P^{-1} = P^t$, A y B son congruentes.

¿Son semejantes?.

A semejante a $B \Leftrightarrow A = P^{-1}BP$. ($A$ y B cuadradas y P regular) $\Rightarrow$ A es cierta.

¿A es diagonalizable?.

❖ A es diagonalizable $\Leftrightarrow$ Es semejante a una matriz diagonal.

Por ser B diagonal $\Rightarrow$ B es cierta.

¿Son equivalentes?.

Al comparar las definiciones de matrices semejantes y equivalentes, es claro que:

❖ Si A y B son matrices semejantes, entonces son equivalentes $\Rightarrow$ C es cierta.

Si $P^{-1} = P^t$, *¿son congruentes?.*

❖ A congruente con B (de orden n) $\Leftrightarrow$ Existe P regular, tal que $A = P^tBP$.

Como $A = P^{-1}BP = P^tBP \Rightarrow$ D es cierta.

7. Sean $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ y una matriz de paso $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$. Las condiciones que deben cumplir a, b, c y d para que A y B sean semejantes son: A) $a^2 + b^2 = c^2$, $d = 0$; B) $b = c = 0$, $d \neq 0$, $a \neq 0$; C) $b = d$ y $c = 0$; D) Nunca pueden ser semejantes.

❖ A semejante a $B \Leftrightarrow$ Existe P, regular, tal que $A = P^{-1}BP \Leftrightarrow PA = BP$.

Si la matriz $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ verifica $PA = BP$, entonces:

$$\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} 2a & b \\ 2c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2a-c & 2b-d \\ c & d \end{pmatrix} \Rightarrow$$

$\Rightarrow 2a = 2a - c$; $b = 2b - d$; $2c = c$; $d = d \Rightarrow c = 0$, $a = a$; $b = d \Rightarrow P = \begin{pmatrix} a & b \\ 0 & b \end{pmatrix}$, que es regular.

$\Rightarrow$ La única opción correcta es C.

8. Si $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ es semejante a $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$ y la primera columna de P es (1,0,1), entonces: A) $P = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 2 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; B) $P = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$; C) $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

A semejante a una matriz diagonal $\Lambda \Leftrightarrow A$ es diagonalizable, es decir, existe una matriz regular $P = \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}$, llamada de paso, tal que $P\Lambda = AP \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \Lambda = P^{-1}AP$.

❖ Señalamos que como la semejanza de matrices es una relación de equivalencia $A = P^{-1}\Lambda P \Leftrightarrow \Lambda = Q^{-1}AQ$, siendo $Q = P^{-1}$. Por abuso del lenguaje, escribimos también, a veces, $\Lambda = P^{-1}AP$.

¿Cuál es la matriz de paso P?.

$$P\Lambda = AP \Leftrightarrow \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix}.$$

Igualando los términos que ocupan el mismo lugar en las matrices producto, resultan las condiciones: $\begin{cases} c = 0, a = g \\ d = 0, b = -e. \\ h = 0, f = -i \end{cases}$

Es matriz de paso cualquier matriz de la forma $P = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -b & f \\ a & 0 & -f \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ Solo es correcta la opción C.

9. Si A es la matriz del ejercicio anterior, entonces A^{15} es:

A) $\begin{pmatrix} 2^{14} & 2^{14}-2^{29} & 2^{29} \\ 2^{14} & 2^{29}-2^{14} & -2^{29} \\ 2^{14} & 2^{14}-2^{29} & 2^{29} \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 2^{15} & 2^{15} & 0 \\ 0 & -2^{30} & 2^{30} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 2^{14} & 2^{29} & 0 \\ 2^{14} & -2^{29} & 0 \\ 2^{14} & 2^{29} & 0 \end{pmatrix}$;

D) Distinta a las anteriores.

❖ Una aplicación de la diagonalización es la rapidez para calcular potencias.

❖ Si $A = P^{-1}\Lambda P$, entonces $A^n = P^{-1}\Lambda^n P$, si Λ es una matriz diagonal.

En este ejercicio, $A = \begin{pmatrix} 3 & -1 & -1 \\ -2 & 2 & 2 \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}$ y $\Lambda = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2^2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$. Como matriz de paso tomamos cualquiera que cumpla las condiciones exigidas, por ejemplo, $P = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$, entonces $P^{-1} = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}$.

$$A^{15} = P^{-1}\Lambda^{15}P = \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}^{15}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{15} & 0 & 0 \\ 0 & 2^{30} & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} =$$

$$= \begin{pmatrix} 1/2 & 1/2 & 1/2 \\ 1/2 & -1/2 & -1/2 \\ 1/2 & 1/2 & -1/2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2^{15} & 2^{15} & 0 \\ 0 & -2^{30} & 2^{30} \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2^{14} & 2^{14} - 2^{29} & 2^{29} \\ 2^{14} & 2^{29} - 2^{14} & -2^{29} \\ 2^{14} & 2^{14} - 2^{29} & 2^{29} \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ La única opción correcta es A.

Ejercicios relativos a:

"Valores propios y vectores propios."

1. Si la matriz cuadrada M tiene el valor propio λ, se verifica que la matriz M^2 tiene el valor propio: A) λ; B) λ^2; C) No hay relación entre los valores propios de M y los de M^2; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Si λ es valor propio (o autovalor) de M, existe un vector propio $\overline{v}$, también llamado autovector (es un vector columna), que verifica $M\overline{v} = \lambda\overline{v}$.

Podemos escribir $M^2\overline{v} = MM\overline{v} = M(\lambda\overline{v}) = \lambda M\overline{v} = \lambda(\lambda\overline{v}) = \lambda^2\overline{v} \Rightarrow$ Es correcta B.

2. Si A una matriz regular idempotente ($A^2 = A$), entonces: A) 1 y 0 son valores propios de A; B) 1 es el único valor propio; C) Los valores propios pueden ser cualquier número real; D) Ninguna de las anteriores es verdadera.

¿Admite A como valor propio el 0?.

Si $\lambda = 0$ fuese valor propio, existiría el vector columna $\overline{v} \neq \overline{0}$ tal que $A\overline{v} = 0\overline{v} = \overline{0}$ que es solución del sistema homogéneo $A\overline{v} = \overline{0}$, entonces $|A| = 0$ (porque el sistema que define sería compatible indeterminado, al tener la menos una solución distinta de la nula) y A no sería regular, en contradicción la hipótesis $\Rightarrow$ A y C son falsas.

¿Cómo son los autovalores de A?.

Si λ es autovalor de A, entonces existe un vector columna $\overline{v} \neq \overline{0}$ tal que $A\overline{v} = \lambda\overline{v}$.

Como, además, $A^2\overline{v} = AA\overline{v} = A\lambda\overline{v} = \lambda(A\overline{v}) = \lambda^2\overline{v} \Rightarrow \lambda^2$ es autovalor de A^2.

Por ser $A = A^2$, de las expresiones anteriores se deduce que $\lambda X = \lambda^2 X \Rightarrow \lambda - \lambda^2 = 0$.

La única solución posible de esta ecuación es la $\lambda = 1$ porque, como se ha probado anteriormente, la opción $\lambda = 0$ no es posible $\Rightarrow$ Es correcta la opción B.

3. Si la ecuación característica de A es $(\lambda - 3)^2(\lambda + 1) = 0$ e I es la matriz unidad del mismo orden que A, se verifica que: A) $|A - I| = |A - 3I|$; B) $|A + I| = |A - 3I|$; C) $|A + I| = |A + 3I|$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Dada una matriz A cuadrada, su ecuación característica es $|A - \lambda I| = 0$.

❖ Las soluciones de la ecuación característica de A son sus valores propios.

La ecuación característica de A es $|A - \lambda I| = (\lambda - 3)^2(\lambda + 1) = 0$.

$\Rightarrow$ Los valores propios son $\lambda_1 = 3$ (con multiplicidad algebraica doble) y $\lambda_2 = -1$.

Sustituyendo en la ecuación característica los valores propios encontrados se tiene: $|A - 3I| = 0$ y $|A + I| = 0$. Por tanto $|A - 3I| = |A + I| = 0$.

$\Rightarrow$ Es correcta la opción B.

A y C son falsas porque en cada una de ellas un término sí es 0 (el correspondiente al autovalor) y el otro no.

4. Dadas dos matrices A y B se cumple: A) Si A y B son semejantes tienen la misma ecuación característica; B) Si A y B tienen la misma ecuación característica son semejantes; C) Ninguna de las anteriores es cierta.

¿Si A y B son semejantes entonces tiene la misma ecuación característica?.

❖ Si dos matrices A y B son semejantes existe P regular tal que $B = P^{-1}AP$.

La ecuación característica asociada a B es $|B - \lambda I| = 0$. Como $B = P^{-1}AP$ resulta $|B - \lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda I| = |P^{-1}AP - \lambda P^{-1}P| = |P^{-1}(A - \lambda I)P| = |P^{-1}||A - \lambda I||P|$.

Como $|P^{-1}| = 1/|P| \Rightarrow |B - \lambda I| = |A - \lambda I|$, es decir, los dos polinomios característicos son iguales $\Rightarrow$ A es cierta.

Si A y B tienen la misma ecuación característica, entonces ¿son semejantes?.

Para probar que no es cierto es suficiente el contraejemplo siguiente:

Las matrices $A=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}$ tienen el mismo polinomio característico $|B-\lambda I|=|A-\lambda I|=(1-\lambda)^2$.

Si fueran semejantes existiría una matriz regular $P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$, tal que

$B=P^{-1}AP \Leftrightarrow PB=AP$, luego $PB=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & 1\\ 0 & 1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & a+b\\ c & c+d\end{pmatrix}$ y $AP=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ Para que sean iguales ambas expresiones será $a+b=b \Rightarrow a=0$, $c+d=d$

$\Rightarrow c=0 \Rightarrow P=\begin{pmatrix}0 & b\\ 0 & d\end{pmatrix}$, que no es regular $\Rightarrow$ B es falsa.

5. Los valores propios de $M=\begin{pmatrix}0 & a & a^2\\ 1/a & 0 & a\\ 1/a^2 & 1/a & 0\end{pmatrix}$ verifican: A) Dependen del valor de a; B) $\lambda=-1$, $\lambda=2$; C) $\lambda=1$, $\lambda=-1$; D) Ninguno de los anteriores.

❖ Los valores propios de una matriz son las raíces de su ecuación característica.

La ecuación característica de M es $|M-\lambda I|=0$, es decir:

$$\begin{vmatrix}-\lambda & a & a^2\\ 1/a & -\lambda & a\\ 1/a^2 & 1/a & -\lambda\end{vmatrix}=-\lambda^3+\left(\frac{1}{a}\right)^2a^2+a^2\left(\frac{1}{a}\right)^2+\lambda\left(\frac{1}{a}\right)^2a^2+\lambda a\frac{1}{a}+a\frac{1}{a}\lambda=$$

$$=-\lambda^3+3\lambda+2=0.$$

$\Rightarrow \lambda=2$, $\lambda=-1$ son los valores propios de $M \Rightarrow$ Es cierta la opción B.

6. Siendo I la matriz unidad de orden n, se cumple: A) 1 es el único valor propio de I y cualquier vector $\overline{v} \in \mathbb{R}^n$ es autovector de I; B) 0 es el único autovalor de I y cualquier vector $\overline{v} \in \mathbb{R}^n$ es autovalor de I; C) La opción A sólo es verdadera en determinadas condiciones; D) Son falsas A, B y C.

❖ Un vector $\overline{v}$ distinto de $\overline{0}$ es autovector o vector propio de una matriz A si existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que $(A - \lambda I)\,\overline{v} = \overline{0}$.

¿Es 1 el único valor propio de la matriz I?.

Para cualquier vector $\overline{v} \in \mathbb{R}^n$ se cumple que $I\overline{v} = 1\overline{v} \Rightarrow 1$ es autovalor de I y cualquier vector $\overline{v}$ es autovector de I.

❖ Si tenemos k vectores propios correspondientes a k valores propios distintos, entonces los k vectores son linealmente independientes.

Si existiese otro valor propio λ de I distinto de 1, y $\overline{v} \in \mathbb{R}^n$ fuera su autovector, entonces, por la propiedad anterior, $\overline{v}$ sería linealmente independiente de cualquier vector de $\mathbb{R}^n$, que es imposible (porque $\overline{v}$ es cualquiera).

$\Rightarrow$ A es cierta y C es falsa, porque no es necesaria ninguna condición adicional.

¿0 es valor propio de la matriz I?.

Si lo fuera debería cumplir $I\overline{v} = 0\overline{v} = \overline{0}$ y $\overline{v}$ tendría que ser $\overline{0}$, que no es posible para un autovector $\Rightarrow$ B es falsa.

7. Si $A = \begin{pmatrix} -1 & 3 & -3 \\ -2 & 3 & -2 \\ -2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$, y $(-1, 0, 1)$ es vector propio de A, entonces el valor propio correspondiente es: A) $\lambda = 0$; B) $\lambda = 2$; C) $\lambda = 1$; D) Ninguno de ellos.

Si $(1, 0, 1)$ es vector propio de A entonces existe $\lambda \in \mathbb{R}$ tal que,

$$(A - \lambda I)\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1-\lambda & 3 & -3 \\ -2 & 3-\lambda & -2 \\ -2 & 1 & -\lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \lambda - 2 \\ 0 \\ 2 - \lambda \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \lambda = 2.$$

$\Rightarrow$ B es cierta y A, C y D son falsas.

8. El conjunto de todos los vectores reales $\overline{v} \neq (0,0,0)^t$, tales que, $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overline{v} = \lambda \overline{v}$ para algún valor de λ, es: A) $\{(1,1,1)\}$: B) $\{(1,0,0),(0,1,1)\}$; C) El subespacio $x_2 - x_3 = 0$: D) Ninguno de los conjuntos anteriores.

❖ Los vectores propios de una matriz A de valor propio λ son los vectores $\overline{v}$ tales que $A\overline{v} = \lambda\overline{v}$, es decir, $(A - \lambda I)\overline{v} = \overline{0}$.

Los vectores que verifican $\begin{pmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 0 & 3 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix} \overline{v} = \lambda \overline{v}$ son los vectores propios correspondientes al valor propio λ.

❖ El conjunto de vectores propios asociados a λ es un subespacio vectorial.

$\Rightarrow$ A es falsa porque el conjunto que define no es subespacio.

¿Cuáles son los valores propios de A?.

El polinomio característico de A es:

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 2 & -2 \\ 0 & 3-\lambda & -1 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\begin{vmatrix} 3-\lambda & -1 \\ 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)\left[(3-\lambda)(1-\lambda)+1\right] =$$

$$= (2-\lambda)(\lambda^2 - 4\lambda + 4) = (2-\lambda)^3.$$

La ecuación característica es $(2-\lambda)^3 = 0$.

El autovalor es $\lambda = 2$, con multiplicidad algebraica 3.

Los vectores asociados al autovalor verifican:

$$(A-2I)\bar{v}=\bar{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&2&-2\\0&1&-1\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{cases}2x_2-2x_3=0\\x_2-x_3=0\\x_2-x_3=0\end{cases}\Rightarrow x_2-x_3=0.$$

$\Rightarrow$ C es correcta.

Unas ecuaciones paramétricas del subespacio $x_2-x_3=0$ son:

$$\begin{cases}x_1=\lambda\\x_2=\mu\\x_3=\mu\end{cases}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\lambda\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+\mu\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\Rightarrow \text{B es correcta.}$$

9. A es la matriz asociada a una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$. Entonces: A) $\bar{0}$ es vector propio de A; B) Si A tiene 3 autovalores distintos λ_1, λ_2, $\lambda_3 \Rightarrow |A|=\lambda_1\lambda_2\lambda_3$; C) B sólo es cierta cuando se cumplen determinadas condiciones; D) Ninguna de las anteriores se cumple.

¿$\bar{0}$ es vector propio de A?.

Los vectores propios no pueden ser el vector nulo, por definición $\Rightarrow$ A es falsa.

¿Qué ocurre si los autovalores son distintos?.

Si A tiene 3 autovalores distintos λ_1, λ_2, $\lambda_3 \Rightarrow$ Existen tres vectores propios $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ de $\mathbb{R}^3$, asociados cada uno a un valor propio, que son linealmente independientes. Además, como A es la matriz asociada a una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$ su orden es tres y por tanto, $\bar{v}_1$, $\bar{v}_2$, $\bar{v}_3$ forman base de $\mathbb{R}^3$.

En dicha base la matriz asociada a la aplicación tiene la forma:

$$B=\begin{pmatrix}\lambda_1&0&0\\0&\lambda_2&0\\0&0&\lambda_3\end{pmatrix}\Rightarrow A \text{ y } B \text{ son semejantes} \Rightarrow |A|=|B|\Rightarrow \text{B es cierta y C falsa.}$$

10. Si A es una matriz regular y B es una matriz cuadrada arbitraria del mismo orden que A, entonces las matrices AB y BA tienen los valores propios: A) Iguales; B) Opuestos; C) Recíprocos; D) Ninguna de las respuestas anteriores.

Si λ es un valor propio de AB, como A es una matriz regular se cumple: $AB-\lambda I = AB-\lambda AA^{-1} = A(B-\lambda A^{-1})$.

Tomando determinantes en la expresión anterior:

$$|AB-\lambda I| = |A(B-\lambda A^{-1})| = |A||B-\lambda A^{-1}| = |B-\lambda A^{-1}||A| = |(B-\lambda A^{-1})A| = |BA-\lambda I|.$$

$\Rightarrow$ AB y BA tienen los autovalores iguales $\Rightarrow$ La única opción correcta es A.

11. Dada la matriz $A=\begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, el subespacio de los vectores propios asociados al autovalor 2 es: A) $\{(1,0,0), (0,1,1)\}$; B) $\{(1,0,0), (0,1,0)\}$; C) $\{(1,-1,0), (0,0,1), (0,1,-1)\}$; D) Ninguna de las anteriores es cierta.

¿Es 2 autovalor?.

Los autovalores son las raíces de la ecuación característica: $|A-\lambda I| = 0$.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 & -1 \\ 0 & 2-\lambda & 0 \\ 0 & 1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow (2-\lambda)^2(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2$$ autovalor doble y $\lambda_2 = 1$, con multiplicidad algebraica 1.

¿Subespacio asociado a los vectores propios de valor propio 2?.

El subespacio asociado al valor propio 2 es el conjunto de vectores que verifican:

$$(A-2I)\overline{v}=\overline{0}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}0&1&-1\\0&0&0\\0&1&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Leftrightarrow\begin{pmatrix}x_2-x_3\\0\\x_2-x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},$$ que es plano $x_2-x_3=0$.

Cualquier vector que verifica esta ecuación se puede escribir como

$$x_2=x_3\Leftrightarrow x_1=\alpha,x_2=\beta,x_3=\beta\Leftrightarrow(x_1,x_2,x_3)=\alpha(1,0,0)+\beta(0,1,1).$$

Esto significa que $x_2-x_3=0$ es el subespacio $\langle(1,0,0),(0,1,1)\rangle$.

$\Rightarrow$ A es correcta y el resto de opciones son falsas.

Ejercicios relativos a:

"Diagonalización de matrices."

1. La matriz $B=\begin{pmatrix}1 & 1\\ 1 & 0\end{pmatrix}$ verifica: A) No tiene autovalores en $\mathbb{R}$; B) Es diagonalizable; C) Tiene dos autovalores reales distintos y uno de ellos es $1/2+\sqrt{5}/2$; D) Ninguna de las anteriores es correcta.

❖ Una matriz real cuadrada simétrica tiene todas sus raíces características reales.

$\Rightarrow$ A es falsa.

¿Cuáles son los autovalores de B?.

Son las soluciones de la ecuación $\begin{vmatrix}1-\lambda & 1\\ 1 & -\lambda\end{vmatrix}=0$. Desarrollando el determinante se obtiene $\lambda^2-\lambda-1=0$, cuyas raíces son $x=1/2\pm\sqrt{5}/2$. Entonces la matriz B tiene dos autovalores reales y distintos $\Rightarrow$ C es correcta.

❖ Una matriz de orden n con n valores propios distintos es diagonalizable $\Rightarrow$ B es cierta.

2. Si A es una matriz real cuadrada de orden n, entonces: A) A tiene un autovalor cero equivale a decir que su determinante es cero; B) A es diagonalizable equivale a decir que sus autovalores son distintos; C) A puede ser diagonalizable aunque sus autovalores no sean distintos; D) Las opciones A y B son falsas.

❖ Una matriz A tiene un autovalor λ si y sólo si λ es raíz de su ecuación característica, es decir, $|A-\lambda I|=0$.

Por tanto A tiene un autovalor 0 si y sólo si $|A - 0I| = 0 \Leftrightarrow |A| = 0$.

$\Rightarrow$ A es verdadera y D es falsa.

❖ Una condición suficiente para que una matriz de orden n sea diagonalizable es que posea n valores propios distintos.

No es una condición necesaria que sus autovalores sean distintos, pues $A = \begin{pmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ es una matriz diagonal cuyo autovalor es 3 con multiplicidad algebraica 2.

$\Rightarrow$ B es falsa y C es cierta.

3. Es cierto que: A) Si una matriz cuadrada M de orden n tiene k autovalores distintos y $k < n$, entonces M no es diagonalizable; B) Si el determinante de M es cero, el vector cero es autovector de M; C) En determinadas condiciones A puede ser verdadera; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Una matriz A es diagonalizable si y sólo si para cada valor propio λ de la matriz A la multiplicidad algebraica (multiplicidad de λ como raíz característica) coincide con la multiplicidad geométrica (dimensión del subespacio de autovectores de valor propio λ).

$\Rightarrow$ A es falsa y C es verdadera.

❖ Por definición de autovector, el vector cero no puede ser autovector $\Rightarrow$ B es falsa.

4. Si $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$, se verifica: A) El subespacio de los vectores propios asociados al autovalor 1 es $\langle (0,0,1) \rangle$; B) El subespacio de los vectores propios

asociados al autovalor 1 es $\{(x_1, x_2, x_3) \in \mathbb{R}^3 / x_1 = 1\}$; C) La matriz A no es diagonalizable; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Los vectores propios de valor propio λ asociados a la matriz A, son las soluciones de la ecuación matricial $(A - \lambda I)\overline{v} = \overline{0}$.

¿Cuáles son los valores propios de la matriz?.

Son las raíces de la ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 1 \\ 0 & 1-\lambda & 1 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Leftrightarrow (1-\lambda)^3 = 0 \Leftrightarrow \lambda = 1, \text{ que es un autovalor triple.}$$

¿Cuál es el subespacio de los autovectores de valor propio 1?.

El subespacio L_1 asociado a $\lambda = 1$ es el conjunto de vectores, $\overline{v}$, que verifica $(A - 1I)\overline{v} = \overline{0}$, o lo que es lo mismo:

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_2 + x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_2 = 0 \\ x_3 = 0 \end{cases}.$$

Como la condición es que las 2 últimas coordenadas sean 0, el subespacio L_1 es $\{\alpha(1,0,0), \forall \alpha \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0) \rangle$, de dimensión 1 $\Rightarrow$ A y B son falsas.

¿Coincide la multiplicidad algebraica del autovalor y la multiplicidad geométrica del subespacio asociado?.

La multiplicidad algebraica del autovalor 1 es 3 y la multiplicidad geométrica es 1, que es la dimensión del subespacio vectorial asociado al autovalor. Como no coinciden $\Rightarrow$ La matriz A no es diagonalizable $\Rightarrow$ C es cierta.

5. La matriz $A=\begin{pmatrix}1 & a & 0\\ 0 & 2 & 0\\ a & 1 & 1\end{pmatrix}$ es diagonalizable: A) Si $a \neq 0$; B) Si $a = 0$; C) Para valores pares de a; D) En ninguno de los casos anteriores.

¿Valores propios de A?.

Son las soluciones de la ecuación característica $|A - \lambda I| = 0$.

$$\begin{vmatrix}1-\lambda & a & 0\\ 0 & 2-\lambda & 0\\ a & 1 & 1-\lambda\end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda) = 0 \Leftrightarrow \lambda_1 = 1 \text{ es raíz doble, } \lambda_2 = 2 \text{ simple}$$

$\forall a \in \mathbb{R}$.

¿Subespacio L_1 asociado al valor propio 1?.

$$(A - 1I)\overline{v} = \overline{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}0 & a & 0\\ 0 & 1 & 0\\ a & 1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\ 0\\ 0\end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} ax_2 = 0\\ x_2 = 0\\ ax_1 + x_2 = 0\end{cases}.$$

Si $a = 0$, cualquier vector de L_1 tiene la forma $(x_1, 0, x_3)$, y podemos escribir $L_1 = \{\alpha(1,0,0) + \beta(0,0,1),\ \alpha, \beta \in \mathbb{R}\} = \langle (1,0,0), (0,0,1)\rangle$, que tiene dimensión 2.

Si $a \neq 0$, $(x_1, x_2, x_3) \in L_1 \Leftrightarrow x_1 = 0, x_2 = 0$ y $L_1 = \langle (0,0,1)\rangle$, de dimensión 1.

¿Subespacio L_2 asociado al valor propio 2?.

❖ Si λ es un valor propio asociado a la matriz A siempre su multiplicidad geométrica es mayor o igual que 1 y menor o igual que su multiplicidad algebraica.

Como 2 es una autovalor simple, su multiplicidad algebraica es 1 y L_2 el subespacio vectorial asociado a $\lambda_2 = 2$ tiene dimensión 1 para todo valor de a.

¿Es diagonalizable A?.

La matriz es diagonalizable si la multiplicidad algebraica y geométrica de todos los autovalores coinciden. Sólo será diagonalizable si $a = 0$, pues en ese caso la multiplicidad algebraica y la geométrica coinciden para cada valor propio $\Rightarrow$ Sólo B es correcta.

6. Al diagonalizar la matriz A del ejercicio anterior, los vectores columna de una matriz de paso P verifican: A) Dependen del valor de a; B) Son (1,0,–1),(0,1,–1),(0,0,1); C) Son (1,0,0),(0,0,1),(0.1.1); D) A, B, y C son falsas.

❖ La matriz de paso P de una matriz A que diagonaliza verifica $P\Lambda = AP \Leftrightarrow \Lambda = P^{-1}AP$ siendo Λ la matriz diagonal.

Como se vio en el ejercicio anterior, la matriz es diagonalizable si y sólo si $a = 0$. Este es el único caso que consideraremos.

❖ P tiene como vectores columna los autovectores que forman base de los subespacios asociados a cada valor propio ordenados con el mismo orden en la matriz diagonal.

¿Base del subespacio L_1?.

Como ya vimos, el subespacio vectorial L_1 asociado a $\lambda_1 = 1$ es $x_1 - x_3 = 0$, es decir, $L_1 = \{\alpha(1,0,0) + \beta(0,0,1),\ \forall\alpha, \beta \in \mathbb{R}\}$.

Podemos elegir $\{(1,0,0),(0,0,1)\}$ como una base de L_1.

¿Base del subespacio L_2?.

El subespacio vectorial L_2 asociado a $\lambda_2 = 2$ es:

$$(A-2I)\bar{v} = \bar{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} -x_1 = 0 \\ 0 = 0 \\ x_2 - x_3 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = 0 \\ x_2 = x_3 \end{cases}.$$

Por tanto $L_2 = \{\alpha(0,1,1),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$ y una base es $\{(0,1,1)\}$.

$\Rightarrow$ Los vectores columna de P son (1,0,0), (0,0,1), (0,1,1) $\Rightarrow$ Sólo C es correcta.

7. Dada la matriz $A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$, es cierto que: A) Para el autovalor $\lambda = 2$, la multiplicidad algebraica y geométrica no coinciden; B) Para el autovalor $\lambda = 1$, la multiplicidad algebraica y geométrica no coinciden; C) La matriz A es diagonalizable; D) No existe la matriz de paso P; E) Ninguna de las anteriores.

¿Subespacio asociado a los vectores propios de valor propio 2?.

Como ya se vio en el ejercicio 11 del cap. 6.2, la matriz A tiene como valores propios $\lambda_1 = 2$ (doble) y $\lambda_2 = 1$.

Además el subespacio asociado al valor propio 2 tiene dimensión 2 y es $\langle(1,0,0),(0,1,1)\rangle \Rightarrow$ A es falsa, porque la multiplicidad geométrica es la dimensión del subespacio vectorial asociado.

¿Subespacio asociado al valor propio 1?.

La multiplicidad geométrica es menor o igual que la multiplicidad algebraica y mayor o igual que 1. Para $\lambda = 1$, la multiplicidad algebraica es 1 $\Rightarrow$ La multiplicidad geométrica es 1 $\Rightarrow$ B es falsa.

También lo podíamos resolver determinando el subespacio asociado al autovalor 1:

$$(A - I)\overline{v} = \overline{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 + x_2 - x_3 = 0 \\ x_2 = 0 \\ x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = x_3 \\ x_2 = 0 \end{cases}.$$

es decir, el subespacio $L = \{\alpha(1,0,1),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$, y su dimensión 1, por tanto las multiplicidades coinciden.

¿Es A diagonalizable?.

❖ Una matriz es diagonalizable si y sólo si para cada autovalor, la multiplicidad algebraica coincide con la multiplicidad geométrica.

En esta matriz, la multiplicidad algebraica y la geométrica de cada autovalor coinciden.

$\Rightarrow$ C es correcta porque la matriz se puede diagonalizar.

¿Existe matriz de paso?.

❖ Si una matriz A es diagonalizable, entonces hay matriz de paso P, que se obtiene a partir de los vectores de las bases de cada subespacio de autovectores.

Las columnas de P son los vectores $(1,0,0),(0,1,1),(1,0,1) \Rightarrow$ D es correcta.

8. $A = \begin{pmatrix} 7 & -2 & 1 \\ -2 & 10 & -2 \\ 1 & -2 & 7 \end{pmatrix}$ verifica: A) Tiene 3 autovalores distintos; B) Tiene sólo un autovalor con multiplicidad geométrica 2; C) Tiene 2 autovalores distintos y uno de ellos tiene multiplicidad geométrica 2; D) Ninguna de las anteriores.

¿Cuáles son los autovalores de A?.

Son las raíces de la ecuación característica $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 7-\lambda & -2 & 1 \\ -2 & 10-\lambda & -2 \\ 1 & -2 & 7-\lambda \end{vmatrix} = 0.$

es decir: $(7-\lambda)^2(10-\lambda)+4+4-(10-\lambda)-4(7-\lambda)-4(7-\lambda)=$

$= -\lambda^3 + 24\lambda^2 - 180\lambda + 432 = -(\lambda - 12)(\lambda - 6)^2 = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 12$ y $\lambda_2 = 6$, con multiplicidad algebraica 1 y 2 respectivamente $\Rightarrow$ A y B son falsas.

¿Puede ser 2 la multiplicidad geométrica de 12?.

No, porque su multiplicidad algebraica es 1, y la geométrica siempre es menor o igual que la algebraica.

¿Cuál es multiplicidad geométrica de 6?.

· Es la dimensión del subespacio asociado a $\lambda_2 = 6$, es decir, de los (x_1, x_2, x_3) que verifican

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -2 & 4 & -2 \\ 1 & -2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 - 2x_2 + x_3 \\ -2x_1 + 4x_2 - 2x_3 \\ x_1 - 2x_2 + x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow x_1 - 2x_2 + x_3 = 0.$$

Es la ecuación de un plano en $\mathbb{R}^3$, tiene dimensión 2 $\Rightarrow$ C es correcta, D es falsa.

9. Si A es la matriz del ejercicio anterior, se cumple que: A) El subespacio vectorial asociado al autovalor $\lambda = 12$ tiene dimensión 2; B) La matriz de paso no existe; C) La matriz A es diagonalizable; D) Ninguna de ellas es correcta.

¿Subespacio de los vectores de valor propio 12?.

Se obtiene al resolver la ecuación matricial $(A - 12I)\overline{v} = \overline{0}$.

$$\begin{pmatrix} 7-12 & -2 & 1 \\ -2 & 10-12 & -2 \\ 1 & -2 & 7-12 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{cases} -5x_1 - 2x_2 + x_3 = 0 \\ -2x_1 - 2x_2 - 2x_3 = 0 \\ x_1 - 2x_2 - 5x_3 = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} x_1 - x_3 = 0 \\ x_2 + 2x_3 = 0 \end{cases}.$$

El subespacio asociado al autovalor $\lambda = 12$ es $\{\alpha(1,-2,1),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\}$, que tiene dimensión 1 $\Rightarrow$ A es falsa.

¿Es la matriz A diagonalizable?.

Como se probó en el ejercicio anterior, el otro valor propio asociado a la matriz A es 6 con multiplicidad algebraica 2, y la dimensión del subespacio asociado a dicho valor propio es 2 $\Rightarrow$ Se verifica la igualdad de ambas multiplicidades en cada uno de los autovalores $\Rightarrow$ A es diagonalizable $\Rightarrow$ Existe matriz de paso P $\Rightarrow$ C es correcta y B y D son falsas.

10. Si $A=\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & -1 \end{pmatrix}$, entonces: A) El subespacio vectorial del autovalor negativo es $L = \{\alpha(1,0,1),\ \forall\alpha \in \mathbb{R}\}$; B) La matriz A no es diagonalizable; C) Las opciones A y B son verdaderas; D) Las opciones A y B son falsas.

¿Cuál es la ecuación característica de la matriz A?.

Es $|A-\lambda I|=0$, es decir:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & -2 \\ -1 & 2-\lambda & 1 \\ 0 & 1 & -1-\lambda \end{vmatrix} = -(1-\lambda)(2-\lambda)(1+\lambda)+2-(1-\lambda)-(1+\lambda) =$$

$$=(1+\lambda)(\lambda-1)(\lambda-2)=0$$

Los autovalores son $\lambda_1=-1$, $\lambda_2=1$, $\lambda_3=2$. Con estos resultados podemos asegurar que la matriz A es diagonalizable $\Rightarrow$ B es falsa.

¿Cuál es el subespacio asociado a $\lambda=-1$?.

Se puede obtener de la expresión $(A+I)\overline{v}=\overline{0}$, es decir,

$$\begin{pmatrix} 2 & 1 & -2 \\ -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix} 2x_1+x_2-2x_3=0 \\ -x_1+3x_2+x_3=0 \\ x_2=0 \end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix} x_1=x_3 \\ x_2=0 \end{matrix}\right\}.$$

El subespacio asociado al autovalor $\lambda = -1$ es $L = \{\alpha(1,0,1),\ \forall \alpha \in \mathbb{R}\} \Rightarrow$ A es cierta.

11. Si $A = \begin{pmatrix} a & b & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ con $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq b$, $b \neq 0$ entonces A es diagonalizable: A) Si $a \neq 1$ y $a \neq -1$; B) Si $a = 1$; C) Si $a = -1$; D) A, B y C son falsas.

¿Cuál es la ecuación característica de la matriz A?.

$$|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} a-\lambda & b & 0 \\ 0 & -1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (a-\lambda)(-1-\lambda)(1-\lambda) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 1, \lambda_2 = -1, \lambda_3 = a.$$

Opción A: $a \neq 1$ y $a \neq -1 \Rightarrow$ los tres valores propios son distintos y la matriz es diagonalizable $\Rightarrow$ A es cierta.

Opción B: $a = 1 \Rightarrow \lambda_1 = \lambda_3 = 1$ y $\lambda_2 = -1$.

Dimensiones de los subespacios asociados:

Al autovalor doble 1:

$$\begin{pmatrix} 0 & b & 0 \\ 0 & -1-1 & 0 \\ 0 & 0 & 1-1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{cases} bx_2 = 0 \\ -2x_2 = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x_1 = \alpha \\ x_2 = 0 \Rightarrow L_1 = \{(\alpha,0,\beta); \alpha, \beta \in \mathbb{R}\}, \\ x_3 = \beta \end{cases}$$

que tiene dimensión 2.

Al autovalor simple -1:

El subespacio asociado a λ_2 tiene dimensión 1, porque su multiplicidad algebraica es 1.

$\Rightarrow$ La matriz A en estas condiciones es diagonalizable $\Rightarrow$ B es verdadera.

Opción C: Si $a=-1$, entonces $\lambda_1=1$ es simple y $\lambda_2=-1$ doble. El subespacio asociado a:

$$\begin{pmatrix}0&b&0\\0&0&0\\0&0&2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}\Rightarrow\left.\begin{matrix}bx_2=0\\2x_3=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow\left.\begin{matrix}x_1=\alpha\\x_2=0\\x_3=0\end{matrix}\right\}\Rightarrow L=\{(\alpha,0,0),\alpha\in\mathbb{R}\}.$$

Su dimensión es 1. Es suficiente este resultado para afirmar que la matriz A en estas condiciones no es diagonalizable $\Rightarrow$ C es falsa.

12. Si $A=\begin{pmatrix}2&1&1&-14\\0&3&0&-2\\0&0&1&12\\0&0&0&5\end{pmatrix}$, entonces son autovalores: A) $\lambda=1$; B) $\lambda=-1$; C) $\lambda=3$; D) $\lambda=2$; E) A no es diagonalizable.

¿Cuáles son los valores propios de la matriz?.

Son las raíces de $|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}2-\lambda&1&1&-14\\0&3-\lambda&0&-2\\0&0&1-\lambda&12\\0&0&0&5-\lambda\end{vmatrix}=0$

$$(2-\lambda)(3-\lambda)(1-\lambda)(5-\lambda)=0\Rightarrow\lambda_1=1,\lambda_2=2,\lambda_3=3,\lambda_4=5.$$

$\Rightarrow$ A, C y D son correctas y B es falsa.

¿Es diagonalizable?.

Como hay 4 autovalores distintos y el orden de A es 4 $\Rightarrow$ La matriz es diagonalizable.

$\Rightarrow$ E es falsa.

Ejercicios relativos a:

"Diagonalización de endomorfismos simétricos."

1. Si $A=\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$ y $B=\begin{pmatrix}-1 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}$, entonces: A) Son matrices de un mismo endomorfismo: B) A y B tienen el mismo polinomio característico; C) Existe una matriz regular de cambio de base; D) Ninguna de ellas es cierta.

❖ Dos matrices cuadradas de orden 2 son matrices de un mismo endomorfismo respecto de distintas bases del espacio vectorial si y sólo si existe una matriz regular $P=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}$ de cambio de base, que verifica $A=P^{-1}BP \Leftrightarrow B=PAP^{-1}$.

Es lo mismo que decir que son semejantes.

Si $\begin{pmatrix}-1 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}$, entonces $\begin{pmatrix}-1 & 4\\ -1 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=$

$=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1 & -1\\ 2 & 0\end{pmatrix}$, es decir, $\begin{cases}-a+4c=a+2b\\ -a+2c=c+2d\\ -b+4d=-a\\ -b+2d=-c\end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases}-2a-2b+4c=0\\ -a+c-2d=0\\ a-b+4d=0\\ -b+c+2d=0\end{cases} \Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow \begin{cases}a-c+2d=0\\ b-c-2d=0\end{cases}$.

El sistema obtenido es lineal homogéneo cuya matriz de coeficientes tiene determinante 0.

$\Rightarrow$ El sistema tiene solución distinta de la trivial; una de ellas puede ser $\begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$.

$\Rightarrow$ A y C son ciertas, porque ambas matrices son equivalentes. (Se puede hacer un cambio de base que pasa una matriz a otra).

❖ El polinomio característico de una matriz asociada a un endomorfismo es invariante respecto a un cambio de base.

$\Rightarrow$ Tienen el mismo polinomio característico $\Rightarrow$ B es cierta.

2. Si $A = \begin{pmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 2 & 1 \\ 0 & 2 \end{pmatrix}$, entonces: A) Como tienen el mismo polinomio característico, son matrices de un mismo endomorfismo: B) No tienen el mismo polinomio característico; C) Existe una matriz regular de cambio de base; D) Ninguna de ellas es cierta.

¿Tienen A y B el mismo polinomio característico?.

Polinomio característico de A: $|A - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 0 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2$.

Polinomio característico de B: $|B - \lambda I| = \begin{vmatrix} 2-\lambda & 1 \\ 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)^2$.

$\Rightarrow$ Tienen el mismo polinomio característico $\Rightarrow$ B es falsa.

¿Son matrices de un mismo endomorfismo?.

Si lo son debe existir una matriz regular $P = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}$ de cambio de base, que verifique $B = P^{-1}AP \Rightarrow PB = AP$.

$$\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}^{-1}\Rightarrow\begin{pmatrix}2 & 1\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}a & b\\ c & d\end{pmatrix}\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\Rightarrow$$

$$\Rightarrow\begin{pmatrix}2a & a+2b\\ 2c & c+2d\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}2a & 2b\\ 2c & 2d\end{pmatrix}\Rightarrow\begin{cases}a+2b=2b\\ c+2d=2d\end{cases}\Rightarrow\begin{cases}a=0\\ c=0\end{cases},$$ que no es posible porque P debe ser regular $\Rightarrow$ A es falsa.

❖ Dos matrices pueden tener el mismo polinomio característico y no ser matrices de un mismo endomorfismo.

¿Existe una matriz regular de cambio de base?.

Son matrices de un mismo endomorfismo respecto de distintas bases del espacio vectorial si y sólo si existe una matriz regular de cambio de base.

$\Rightarrow$ C es falsa y sólo D es cierta.

3. Si A es la matriz de una aplicación lineal de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, entonces: A) $\overline{0}$ es vector propio de A; B) Si A es simétrica $\Rightarrow$ Existe una matriz diagonal semejante; C) A puede ser verdad si se cumple determinada condición; D) A, B y C son falsas.

$\Rightarrow$ Por definición, se excluye al vector $\overline{0}$ de ser vector propio $\Rightarrow$ A y C son falsas.

❖ Si A es simétrica, existe una matriz ortogonal P, tal que $P^tAP = P^{-1}AP$ es diagonal $\Rightarrow$ A y la matriz diagonal son semejantes $\Rightarrow$ A es diagonalizable $\Rightarrow$ B es cierta.

4. Si A es la matriz real simétrica asociada a una aplicacion lineal f de $\mathbb{R}^3$ en $\mathbb{R}^3$, entonces: A) f posee una base de vectores ortogonales dos a dos con el producto escalar usual; B) Todos sus valores propios son reales; C) A y B son falsas.

Es un ejercicio teórico cuyas soluciones son:

❖ Si A es una matriz simétrica real, sus valores propios son todos reales $\Rightarrow$ B es cierta.

❖ Si A es una matriz simétrica real, los vectores propios asociados a las raíces características distintas, son ortogonales con el producto escalar usual.

❖ Si A es una matriz simétrica real, entonces existen n vectores propios de A que son ortogonales dos a dos, incluidos los que pertenecen el mismo valor propio $\Rightarrow$ A es cierta.

.

5. La matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \end{pmatrix}$ sólo tiene valores propios reales porque: A) A está definida en $\mathbb{R}$; B) Es simétrica; C) Sus autovalores no son reales porque sus filas son linealmente dependientes; D) Ninguna de las anteriores es verdadera.

¿Cualquier matriz definida en $\mathbb{R}$ tiene autovalores reales?.

Para mostrar que no, tomamos como contraejemplo la matriz $\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$. Su ecuación característica es $\lambda^2 + 1 = 0$, que no tiene autovalores reales $\Rightarrow$ A es falsa.

¿Cualquier matriz simétrica tiene todos sus autovalores reales?.

Sí, y es evidente que la matriz dada es una matriz simétrica $\Rightarrow$ B es cierta.

¿Si las filas son linealmente dependientes sus autovalores no son reales?.

No, ejemplo:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 4-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)(4-\lambda) - 4 = \lambda(\lambda - 5) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 0,\ \lambda_2 = 5 \in \mathbb{R} \Rightarrow$$ C es falsa.

6. Los valores de x para que $P(\lambda) = \lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda x$ sea el polinomio característico de una matriz simétrica son: A) No existen; B) $x \le \frac{1}{12}$; C) $x \le 1$; D) Ninguna de las anteriores.

Queremos que la matriz sea simétrica $\Rightarrow$ Los valores propios son todos reales.

Como $\lambda^3 - \lambda^2 - 3\lambda x = \lambda(\lambda^2 - \lambda - 3x)$, las raíces de $\lambda^2 - \lambda - 3x$ deben ser reales, lo que ocurre sólo si el discriminante es mayor o igual que 0, es decir:

$$(-1)^2 - 4 \cdot 3x = 1 - 12x \ge 0 \Leftrightarrow x \le \frac{1}{12} \Rightarrow \text{ B es cierta.}$$

7. Si A es una matriz ortogonal real ($A^{-1} = A^t$), sus valores propios son: A) Todos positivos; B) 0 y 1; C) ± 1; D) Ninguno de los anteriores.

Sea λ un valor propio real de A asociado al vector propio $\overline{v}$ se tiene que verificar que $A\overline{v} = \lambda\overline{v}$.

Al trasponer ambos miembros de la igualdad se obtiene $(A\overline{v})' = \lambda\overline{v}' \Rightarrow \overline{v}'A' = \lambda\overline{v}'$.

Al multiplicar por la derecha esta última expresión por $A\overline{v} = \lambda\overline{v}$, se obtiene $\overline{v}'A'A\overline{v} = \lambda^2\overline{v}'\overline{v}$.

Como $A^{-1} = A^t$ la igualdad anterior se transforma en $\overline{v}'\overline{v} = \lambda^2\overline{v}'\overline{v} \Rightarrow \overline{v}'\overline{v}(1-\lambda^2) = 0$.

Por ser $\overline{v}$ distinto del vector $\overline{0} \Rightarrow \lambda^2 = 1 \Rightarrow \lambda = \pm 1 \Rightarrow$ La única opción correcta es C.

8. Las matrices $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & -1 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix}$ y $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ verifican: A) Son congruentes y semejantes; B); Son congruentes pero no semejantes C) Son semejantes pero no congruentes; D) Ninguna de las anteriores.

¿Son A y B semejantes?.

Los autovalores de B son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$. Pero si los autovalores de A son distintos, A es semejante a una matriz diagonal formada con estos autovalores.

Si los autovalores de A son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3$, entonces A y B son semejantes.

Los autovalores de A se determinan mediante la ecuación característica:

$$|A-\lambda I| = \begin{vmatrix} 1-\lambda & 1 & 0 \\ 1 & 2-\lambda & -1 \\ 0 & -1 & 1-\lambda \end{vmatrix} = (1-\lambda)^2(2-\lambda)-(1-\lambda)-(1-\lambda) =$$

$= -\lambda(1-\lambda)(3-\lambda) = 0$ y son $\lambda_1 = 0$, $\lambda_2 = 1$, $\lambda_3 = 3 \Rightarrow A$ y B son semejantes.

¿Es A congruente con la matriz diagonal B?.

❖ Toda matriz simétrica es congruente con una matriz diagonal.

$\Rightarrow A$ es congruente con una matriz diagonal. Pero, ¿es B esta matriz?.

❖ Dada una matriz simétrica A, existe una matriz ortogonal P, tal que P^tAP es una matriz diagonal formada por los valores propios de A.

Entonces $P^tAP = B$, por lo que A y B son congruentes.

$\Rightarrow$ Sólo la opción A es cierta.

9. $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 3 & -4 \\ 2 & 3 & 5 & -2 \\ 0 & -4 & -2 & 3 \end{pmatrix}$ verifica: A) Se puede diagonalizar mediante una matriz ortogonal; B) Se puede diagonalizar, pero no mediante una matriz ortogonal; C) No es diagonalizable.

Como A es una matriz simétrica, existe una matriz ortogonal P, tal que P^tAP es diagonal.

$\Rightarrow$ A es cierta y B y C son falsas.

CAPÍTULO 7

FORMAS BILINEALES

Ejercicios relativos a:

"Definiciones, propiedades y expresión matricial de las aplicaciones bilineales y las formas bilineales."

1. Si E, F, V son espacios vectoriales reales, una aplicación $f: E \times F \to V$ es bilineal si se cumplen: A) $\begin{cases} f(\bar{x}, \bar{y} + \bar{y}') = f(\bar{x}, \bar{y}) + f(\bar{x}, \bar{y}') \\ f(\bar{x}, \lambda\bar{y}) = \lambda f(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases}$;

B) $\begin{cases} f(\bar{x} + \bar{x}', \bar{y}) = f(\bar{x}, \bar{y}) + f(\bar{x}', \bar{y}) \\ f(\lambda\bar{x}, \bar{y}) = \lambda f(\bar{x}, \bar{y}) \end{cases}$: C) Las condiciones expresadas en las opciones A y B; D) Otras condiciones distintas a las de opciones anteriores.

Una aplicación $f: E \times F \to V$ es bilineal cuando verifica las condiciones expresadas en las opciones A y B $\Rightarrow$ Es correcta la opción C.

2. $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ definida por $f\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1 y_1 - x_1 y_2 - 3x_2 y_1 + 3x_2 y_2$ es una aplicación que verifica: A) Es lineal respecto a la primera variable; B) Es lineal respecto a la segunda variable; C) Es bilineal; D) A, B y C son falsas.

❖ La aplicación $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ es bilineal si es lineal en la primera variable y es lineal en la segunda variable, es decir, si $\begin{cases} f(\overline{x}+\overline{x}',\overline{y}) = f(\overline{x},\overline{y}) + f(\overline{x}',\overline{y}) \\ f(\lambda\overline{x},\overline{y}) = \lambda f(\overline{x},\overline{y}) \end{cases}$ y $\begin{cases} f(\overline{x},\overline{y}+\overline{y}') = f(\overline{x},\overline{y}) + f(\overline{x},\overline{y}') \\ f(\overline{x},\lambda\overline{y}) = \lambda f(\overline{x},\overline{y}) \end{cases}$.

¿Es $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ *lineal en la primera variable?.*

Primera condición: *¿Es* $f(\overline{x}+\overline{x}', \overline{y}) = f(\overline{x}, \overline{y}) + f(\overline{x}', \overline{y})$*?.*

Primer miembro: $f(\overline{x}+\overline{x}', y)$.

$$f\big((x_1+x_1', x_2+x_2'),(y_1,y_2)\big) = (x_1+x_1')y_1 - (x_1+x_1')y_2 - 3(x_2+x_2')y_1 + 3(x_2+x_2')y_2.$$

Segundo miembro: $f(\overline{x}, \overline{y}) + f(\overline{x}', \overline{y})$.

$$f\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big) + f\big((x_1',x_2'),(y_1,y_2)\big) = (x_1y_1 - x_1y_2 - 3x_2y_1 + 3x_2y_2) +$$
$$+ (x_1'y_1 - x_1'y_2 - 3x_2'y_1 + 3x_2'y_2).$$

$$\Rightarrow f(\overline{x}+\overline{x}', y) = f(\overline{x}, \overline{y}) + f(\overline{x}', \overline{y}).$$

Segunda condición: *¿Es* $f(\lambda\overline{x}, \overline{y}) = \lambda f(\overline{x}, \overline{y})$ *siendo* λ *un número real cualquiera?.*

Primer miembro: $f(\lambda\overline{x}, \overline{y})$.

$$f\big((\lambda x_1, \lambda x_2),(y_1,y_2)\big) = \lambda x_1y_1 - \lambda x_1y_2 - 3\lambda x_2y_1 + 3\lambda x_2y_2$$

Segundo miembro: $\lambda f(\overline{x}, \overline{y})$.

$$\lambda(x_1y_1 - x_1y_2 - 3x_2y_1 + 3x_2y_2) = \lambda x_1y_1 - \lambda x_1y_2 - 3\lambda x_2y_1 + 3\lambda x_2y_2$$
$$\Rightarrow f(\lambda\overline{x}, \overline{y}) = \lambda f(\overline{x}, \overline{y}).$$

$\Rightarrow$ Es lineal en la primera variable.

¿Es $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ *lineal en la segunda variable?.*

Primera condición: *¿Es* $f(\overline{x},\overline{y}+\overline{y}')=f(\overline{x},\overline{y})+f(\overline{x},\overline{y}')$*?.*

Primer miembro: $f(\overline{x},\overline{y}+\overline{y}')$.

$$f\big((x_1,x_2),(y_1+y_1',y_2+y_2')\big)=x_1(y_1+y_1')-x_1(y_2+y_2')-3x_2(y_1+y_1')+3x_2(y_2+y_2')$$

Segundo miembro: $f(\overline{x},\overline{y})+f(\overline{x},\overline{y}')$.

$$f\big((x_1,x_2),(y_1,y_2)\big)+f\big((x_1,x_2),(y_1',y_2')\big)=\big(x_1y_1-x_1y_2-3x_2y_1+3x_2y_2\big)+$$
$$+\big(x_1y_1'-x_1y_2'-3x_2y_1'+3x_2y_2'\big)$$
$$\Rightarrow f(\overline{x},\overline{y}+\overline{y}')=f(\overline{x},\overline{y})+f(\overline{x},\overline{y}').$$

Segunda condición: *¿Es* $f(\overline{x},\lambda\overline{y})=\lambda f(\overline{x},\overline{y})$ *siendo* λ *un número real cualquiera?.*

Primer miembro: $f(\overline{x},\lambda\overline{y})$

$$f\big((x_1,x_2),(\lambda y_1,\lambda y_2)\big)=\lambda x_1y_1-\lambda x_1y_2-3\lambda x_2y_1+3\lambda x_2y_2.$$

Segundo miembro: $\lambda f(\overline{x},\overline{y})$.

$$\lambda(x_1y_1-x_1y_2-3x_2y_1+3x_2y_2)=\lambda x_1y_1-\lambda x_1y_2-3\lambda x_2y_1+3\lambda x_2y_2.$$
$$f(\overline{x},\lambda\overline{y})=\lambda f(\overline{x},\overline{y}).$$

$\Rightarrow$ Es lineal en la segunda variable$\Rightarrow$ Son ciertas las opciones A, B y C.

3. Si $f:\mathbb{R}^2\times\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$ es una aplicación bilineal, se verifica: A) No es forma bilineal porque el espacio imagen no es $\mathbb{R}$; B) No es forma bilineal porque el origen de la aplicación es un producto de dos espacios iguales; C) Es forma bilineal; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Para que la aplicación bilineal f sea una forma bilineal el espacio origen debe ser el producto cartesiano de dos espacios vectoriales reales iguales, y el es-

pacio imagen debe ser $\mathbb{R}$, es decir, es una aplicación bilineal de la forma $f: E \times E \to \mathbb{R}$, siendo E un espacio vectorial real $\Rightarrow$ Sólo es correcta la opción C.

4. Si la aplicación $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es tal que $f\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = x_1 + y_2$, se verifica: A) f es una aplicación bilineal; B) f es una forma bilineal; C) f no es una aplicación bilineal: D) Ninguna de las anteriores.

❖ Para que $f : \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ sea aplicación bilineal debe verificar:

$$\begin{cases} f(\overline{x} + \overline{x}', \overline{y}) = f(\overline{x}, \overline{y}) + f(\overline{x}', \overline{y}) \\ f(\lambda\overline{x}, \overline{y}) = \lambda f(\overline{x}, \overline{y}) \end{cases} \text{ y } \begin{cases} f(\overline{x}, \overline{y} + \overline{y}') = f(\overline{x}, \overline{y}) + f(\overline{x}, \overline{y}') \\ f(\overline{x}, \lambda\overline{y}) = \lambda f(\overline{x}, \overline{y}) \end{cases}, \text{ siendo}$$

$\overline{x} = (x_1, x_2)$, $\overline{y} = (y_1, y_2)$ pares reales.

❖ Si algún par no verifica alguna de las cuatro condiciones la aplicación no es bilineal.

¿Se cumple siempre $f(\lambda\overline{x}, \overline{y}) = \lambda f(\overline{x}, \overline{y})$*?.*

Primer miembro: $f\big(\lambda(x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = f\big((\lambda x_1, \lambda x_2), (y_1, y_2)\big) = \lambda x_1 + y_2$.

Segundo miembro: $\lambda f\big((x_1, x_2), (y_1, y_2)\big) = \lambda(x_1 + y_2) = \lambda x_1 + \lambda y_2$.

Ambos miembros no son iguales $\Rightarrow f$ no es bilineal $\Rightarrow$ Es correcta la opción C.

5. En la solución del problema de regla de tres compuesta: "*Sabiendo que para vaciar dos depósitos se necesitan 200 bidones de 15 litros de capacidad cada uno, ¿cuántos bidones de 25 litros serían necesarios para vaciar tres depósitos iguales al dado?*" se calcula la imagen de: A) Una aplicación lineal; B) Una aplicación bilineal; C) Una aplicación bilineal simétrica; D) Ninguna de las anteriores.

¿Forma tradicional de plantear y resolver el problema?.

Si D es el número de depósitos, C la capacidad de cada bidón y B el número de bidones necesarios, las relaciones dadas son:

$$\begin{array}{ccc} D & C & B \\ 2 & 15 & 200 \\ 3 & 25 & n \end{array}$$

Es claro que "si hay que vaciar más depósitos hacen falta más bidones", es decir, es una regla de tres directa, donde la relación que existe entre el número de depósitos y el de bidones es 2/3.

De la misma manera "si la capacidad de cada bidón es menor hacen falta más bidones", es decir, es una regla de tres inversa, donde la relación que existe entre la capacidad de cada bidón y el número de bidones es 25/15.

$$\Rightarrow \frac{200}{n} = \frac{2}{3} \cdot \frac{25}{15} = \frac{50}{45} \Rightarrow n = \frac{200.45}{50} = 180.$$

¿Forma de plantear y resolver el problema mediante aplicaciones?.

En la correspondencia $f: D \times C \to B$ cada original tiene una imagen única.

D es el espacio vectorial $\mathbb{R}$ porque el número de depósitos es un número real.
C es el espacio vectorial $\mathbb{R}$ porque la capacidad de cada bidón es un número real.
B es el espacio vectorial $\mathbb{R}$ porque el número de bidones necesarios es un número real.
$\Rightarrow f: D \times C \to B$ es una aplicación de $\mathbb{R} \times \mathbb{R} \to \mathbb{R}$.

Para vaciar un depósito se necesitarían 200/2 = 100 bidones de 15 litros.

Si cada bidón tuviera un litro de capacidad, para vaciar un depósito harían falta $100 \times 15 = 1.500$ bidones, es decir, $f(1,1) = 1.500$.

¿Expresión analítica de f?.

$$f(x_1, x_2) = x_1 \frac{1}{x_2} f(1,1) = x_1 \frac{1}{x_2} 1.500$$

$$f(3,25) = 3 \cdot \frac{1}{25} \cdot 1.500 = 180 \text{ bidones}$$

$\Rightarrow$ La aplicación f no es bilineal porque no verifica $f(x_1, x_2) = x_1 x_2 f(1,1)$.
$\Rightarrow$ La aplicación f no es bilineal porque no es lineal para la segunda variable.
$\Rightarrow$ Sólo es cierta la opción D.

❖ Si ambas reglas de tres fueran directas la aplicación sí sería bilineal.

6. Si E es un espacio vectorial y $f: E \times E \to \mathbb{R}$ es una aplicación bilineal simétrica, es cierto que $\forall \overline{x}, \overline{y} \in E, f(\overline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \overline{y})$ es igual a: A) $f(\overline{x}, \overline{x}) - f(\overline{y}, \overline{y})$; B) $f(-\overline{x} + \overline{y}, -\overline{x} + \overline{y})$; C) $f(\overline{x}, \overline{x}) - 2f(\overline{x}, \overline{y}) + f(\overline{y}, \overline{y})$; D) Ninguna de las anteriores.

Por ser f bilineal se verifica $f(\overline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \overline{y}) = f(\overline{x} - \overline{y}, \overline{x}) - f(\overline{x} - \overline{y}, \overline{y}) =$
$= f(\overline{x}, \overline{x}) - f(\overline{y}, \overline{x}) - f(\overline{x}, \overline{y}) + f(\overline{y}, \overline{y})$.

Por ser f simétrica $f(\overline{y}, \overline{x}) = f(\overline{x}, \overline{y})$, que convierte la expresión anterior en:

$$f(\overline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \overline{y}) = f(\overline{x}, \overline{x}) - 2f(\overline{x}, \overline{y}) + f(\overline{y}, \overline{y}).$$

$\Rightarrow$ Es cierta la opción C y falsa la opción A.

Por ser f bilineal se verifica:

$$f(-\overline{x} + \overline{y}, -\overline{x} + \overline{y}) = f\big(-(\overline{x} - \overline{y}), -(\overline{x} - \overline{y})\big) = -f\big(\overline{x} - \overline{y}, -(\overline{x} - \overline{y})\big) =$$

$$-\big(-f(\overline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \overline{y})\big) = f(\overline{x} - \overline{y}, \overline{x} - \overline{y}) \Rightarrow$$ También es correcta la opción B.

7. Si $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^2$ y $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ una aplicación bilineal, tal que $f(\overline{e}_1, \overline{e}_1) = 1, f(\overline{e}_1, \overline{e}_2) = 2, f(\overline{e}_2, \overline{e}_1) = -1; f(\overline{e}_2, \overline{e}_2) = 5$, se verifica que $f\big((5,3),(-1,2)\big)$ es : A) –19; B) (–19, 48); C) 48; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Fijada una base, toda forma bilineal se puede representar por una matriz cuadrada, y recíprocamente, a toda matriz cuadrada corresponde una forma bilineal única.

❖ $f(\overline{x},\overline{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \dots & x_n \end{pmatrix} \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$, donde $A = (a_{ij})$ es la matriz de la forma bilineal f en la base $B = \{\overline{e}_1, ..., \overline{e}_n\}$, siendo $a_{ij} = (\overline{e}_i, \overline{e}_j)$.

La opción B es falsa porque $(-19, 48) \in \mathbb{R}^2$, mientras que $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$.

¿Matriz de f?.

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix}.$$

¿Expresión matricial de f?.

$$f(\overline{x},\overline{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

¿Qué valor tiene $f\big((5,3),(-1,2)\big)$*?.*

$$f\big((5,3),(-1,2)\big) = \begin{pmatrix} 5 & 3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ -1 & 5 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} -1 \\ 2 \end{pmatrix} = 48 \Rightarrow$$ Es cierta la opción C y falsa A.

8. La matriz A asociada a una forma bilineal $f: E \times E \to \mathbb{R}$ es tal que: A) Es invariante respecto a la base elegida en E; B) Depende de las bases elegidas en E y $\mathbb{R}$; C) Depende de la base elegida en $\mathbb{R}$; D) Ninguna de las anteriores.

Sólo es correcta la opción B, porque cada elemento a_{ij} de la matriz A es $f(\overline{e}_i, \overline{e}_j)$ expresado en la base elegida en $\mathbb{R}$ ($\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, ..., e_n\}$ es una base de E).

9. Si $f(\bar{x}, \bar{y}) = x_1y_1 - 4x_1y_2 + 6x_2y_3 - x_3y_1 - 3x_3y_3$ es la expresión analítica de la forma bilineal $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$, se verifica que la primera fila de la matriz asociada es: A) (1,0,-1); B) (1,–4,0); C) (1,0,-3); D) Ninguna de las anteriores (Utilizando la base canónica).

Los elementos de la base canónica de $\mathbb{R}^3$ son $\bar{e}_1 = (1, 0, 0)$, $\bar{e}_2 = (0, 1, 0)$ y $\bar{e}_3 = (0, 0, 1)$.

Los elementos de la primera fila de la matriz son:

$f(\bar{e}_1,\bar{e}_1) = f\big((1,0,0),(1,0,0)\big) = 1\cdot 1 - 4\cdot 1\cdot 0 + 6\cdot 0\cdot 0 - 0\cdot 1 - 3\cdot 0\cdot 0 = 1;$

$f(\bar{e}_1,\bar{e}_2) = -4; \quad f(\bar{e}_1,\bar{e}_3) = 0 \Rightarrow$ Sólo es cierta la opción B.

A la misma conclusión se habría llegado de la forma siguiente:

¿Expresión matricial de f?.

$$f(\bar{x},\bar{y}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \\ -1 & 0 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

$\Rightarrow$ La primera fila de la matriz asociada es (1,–4,0).

10. Si $f: E \times E \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal, es cierto que: A) Existe una matriz simétrica que define la misma forma bilineal; B) f sólo es simétrica si su matriz lo es; C) f es simétrica si $E = \mathbb{R}^n$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ f es forma bilineal simétrica $\Leftrightarrow \begin{cases} f \text{ es forma bilineal} \\ f(\bar{x},\bar{y}) = f(\bar{y},\bar{x}), \ \forall (\bar{x},\bar{y}) \in E \times E \end{cases}$.

❖ La condición necesaria y suficiente para que una forma bilineal sea simétrica es que la matriz asociada correspondiente sea simétrica $\Rightarrow$ La opción B es correcta.

El ejercicio 9 de cap. 7-1 pone de manifiesto que la opción C es falsa porque la matriz asociada a $f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ es $\begin{pmatrix}1 & -4 & 0\\ 0 & 0 & 6\\ -1 & 0 & -3\end{pmatrix}$, que no es simétrica.

En el ejercicio 7 de cap. 7-1 vimos que:

❖ Fijada una base, toda forma bilineal se puede representar por una matriz cuadrada, y recíprocamente, a toda matriz cuadrada corresponde una forma bilineal única.

Por tanto, como no se puede asociar otra matriz a la matriz asociada a una forma, la opción A es falsa.

11. Sabiendo que $f : E \times F \to V$ es una aplicación bilineal, $A = \{\overline{a}_1, \overline{a}_2\}$ una base de E, $B = \{\overline{b}_1, \overline{b}_2, \overline{b}_3\}$ una base de F, $U = \{\overline{v}_1, \overline{v}_2\}$ una base de V, $f(\overline{a}_1, \overline{b}_1) = \overline{v}_1 - \overline{v}_2$, $f(\overline{a}_1, \overline{b}_2) = -\overline{v}_1 + \overline{v}_2$, $f(\overline{a}_1, \overline{b}_3) = \overline{v}_1 + 2\overline{v}_2$, $f(\overline{a}_2, \overline{b}_1) = \overline{v}_1 + \overline{v}_2$, $f(\overline{a}_2, \overline{b}_2) = \overline{v}_1 + 3\overline{v}_2$ y $f(\overline{a}_2, \overline{b}_3) = 3\overline{v}_1$, es cierto que: A) f es una forma bilineal; B) La matriz asociada a f es real; C) No se puede calcular $f(\overline{x}, \overline{y})$ siendo $\overline{x} \in E$ e $\overline{y} \in F$; D) Ninguna de las anteriores.

¿Es f una forma bilineal?.

No, porque no es una aplicación bilineal de $E \times E \to \mathbb{R} \Rightarrow$ La opción A es falsa.

❖ Observemos que E no puede ser igual a F porque su dimensión es distinta (tienen distinto número de elementos en sus bases respectivas), y V no puede ser $\mathbb{R}$ por la misma razón.

¿Es real la matriz asociada a f?.

No, porque la matriz asociada está formada por elementos del espacio imagen, que no es $\mathbb{R} \Rightarrow$ La opción B es falsa.

¿Se puede calcular $f(\overline{x}, \overline{y})$*?.*

$\overline{x} \in E \Leftrightarrow \overline{x}$ es un vector de coordenadas $(x_1, x_2) = x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2$.
$\overline{y} \in F \Leftrightarrow \overline{y}$ es un vector de coordenadas $(y_1, y_2, y_3) = y_1\overline{b}_1 + y_2\overline{b}_2 + y_3\overline{b}_3$.

Por ser f aplicación bilineal $f(\overline{x}, \overline{y})$ es:

$$
\begin{aligned}
&f(x_1\overline{a}_1 + x_2\overline{a}_2, y_1\overline{b}_1 + y_2\overline{b}_2 + y_3\overline{b}_3) = \\
&= x_1 f(\overline{a}_1, y_1\overline{b}_1 + y_2\overline{b}_2 + y_3\overline{b}_3) + x_2 f(\overline{a}_2, y_1\overline{b}_1 + y_2\overline{b}_2 + y_3\overline{b}_3) = \\
&= x_1\left[y_1 f(\overline{a}_1, \overline{b}_1) + y_2 f(\overline{a}_1, \overline{b}_2) + y_3 f(\overline{a}_1, \overline{b}_3)\right] + \\
&+ x_2\left[y_1 f(\overline{a}_2, \overline{b}_1) + y_2 f(\overline{a}_2, \overline{b}_2) + y_3 f(\overline{a}_2, \overline{b}_3)\right] = \\
&= x_1\left[y_1(\overline{v}_1 - \overline{v}_2) + y_2(-\overline{v}_1 + \overline{v}_2) + y_3(\overline{v}_1 + 2\overline{v}_2)\right] + \\
&+ x_2\left[y_1(\overline{v}_1 + \overline{v}_2) + y_2(\overline{v}_1 + 3\overline{v}_2) + y_3(3\overline{v}_1)\right].
\end{aligned}
$$

$\Rightarrow$ Sí se puede calcular $f(\overline{x}, \overline{y})$, y la opción C es falsa.

La única opción correcta es D.

12. Si $f(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 - x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3$ es la expresión de la forma bilineal $f: \mathbb{R}^3 \times \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ con la base $B = \{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$, y $B = \{\overline{e}'_1, \overline{e}'_2, \overline{e}'_3\}$ es otra base de $\mathbb{R}^3$, tal que $\overline{e}'_1 = (2, 2, 3)_B$, $\overline{e}'_2 = (-1, 0, -1)_B$ y $\overline{e}'_3 = (0, -1, -1)_B$, es cierto que la expresión analítica de f en base B' es: A) $x_1^2 + x_2^2 + x_3^2$; B) $30x_1y_1 + x_2y_2 + 5x_3y_3$; C) $30x_1y_1 - 7x_1y_2 - 11x_1y_3 - 5x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 - 13x_3y_1 + 3x_3y_2 + 5x_3y_3$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ De la misma manera que en el ejercicio 9 buscaremos la matriz $A' = P'AP$.

¿Matriz A asociada a f en la base B?.

$$
A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}.
$$

¿Expresión matricial de f en base B?.

$$f_B(\overline{x}) = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= x_1y_1 - x_1y_3 + x_2y_1 + x_2y_2 + x_2y_3 - x_3y_1 + x_3y_2 + 2x_3y_3.$$

¿Matriz P del cambio de la base B' a la base B?.

❖ Matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B' en base B.

$$P = \begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}.$$

¿Expresión matricial de f en base B'?.

$$f_{B'}(\overline{x}) = (x_1\ x_2\ x_3)\begin{pmatrix} 2 & 2 & 3 \\ -1 & 0 & -1 \\ 0 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 & -1 & 0 \\ 2 & 0 & -1 \\ 3 & -1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= (x_1, x_2, x_3)\begin{pmatrix} 30 & -7 & -11 \\ -5 & 1 & 2 \\ -13 & 3 & 5 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix} =$$

$$= 30x_1y_1 - 7x_1y_2 - 11x_1y_3 - 5x_2y_1 + x_2y_2 + 2x_2y_3 - 13x_3y_1 + 3x_3y_2 + 5x_3y_3.$$

$\Rightarrow$ Sólo es correcta la opción C.

Ejercicios relativos a:

"Definición, propiedades y expresión matricial de las formas cuadráticas."

1. Si $Q(\overline{x}) = \overline{x}'A\overline{x}$ es la expresión analítica de la forma cuadrática, se verifica que la imagen de un vector $\overline{x} \in \mathbb{R}^n$ es: A) Un vector de $\mathbb{R}^n$; B) Un escalar; C) Una matriz; D) Ninguna de las opciones anteriores es cierta.

Si $Q(\overline{x}) = \overline{x}'A\overline{x}$, siendo $\overline{x}$ un vector de $\mathbb{R}^n$, y A una matriz, la imagen es un escalar, ya es un producto de matrices de dimensiones $(1 \times n)$, $(n \times n)$, $(n \times 1)$ y la dimensión de la matriz producto es $1 \Rightarrow$ La solución correcta es B.

Se podría haber resuelto haciendo uso de la definición de forma cuadrática:
$Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ es la forma cuadrática generada por $f : \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ (forma bilineal simétrica) $\Leftrightarrow$ Es la aplicación $Q : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, que verifica $Q(\overline{x}) = f(\overline{x}, \overline{x})$, $\forall \overline{x} \in \mathbb{R}^n$.

2. La forma bilineal $f : E \times E \to \mathbb{R}$ genera una forma cuadrática: A) Siempre; B) Sólo si es simétrica; C) Sólo si es diagonal; D) Nunca.

❖ $Q : E \to \mathbb{R}$ es la forma cuadrática generada por la forma bilineal simétrica $f : E \times E \to \mathbb{R} \Leftrightarrow Q : E \to \mathbb{R}$ es la aplicación que verifica $Q(\overline{x}) = f(\overline{x}, \overline{x})$, $\forall \overline{x} \in E$.

La definición de forma cuadrática nos permite asegurar que está generada por una forma bilineal simétrica $\Rightarrow$ Es correcta la opción B.

3. Si Q es la forma cuadrática generada por la aplicación bilineal simétrica f, se cumple: A) La forma bilineal g definida por $f(x, y) = g(y, x)$ no es Q; B) $Q(x + y) = f(x, x) + f(y, y)$; C) $Q(x + y) = Q(x) + Q(y) + 2f(x, y)$; D) Ninguna de las anteriores.

Ambas formas cuadráticas coinciden porque $f(x, x) = g(x, x)$ y la definición de forma cuadrática Q asociada a f es que verifica siempre $Q(\overline{x}) = f(\overline{x}, \overline{x}) \Rightarrow$ A es falsa.

❖ $Q(\overline{x} + \overline{y}) = f(\overline{x} + \overline{y}, \overline{x} + \overline{y})$.

Por ser f una aplicación bilineal $f(x + y, x + y)$ se puede escribir como:
$f(x+y, x)+f(x+y, y)=f(x, x)+f(x, y)+f(y, x)+f(y, y)=Q(x)+Q(y)+2f(x, y)$.
$\Rightarrow$ La opción B es falsa y C es cierta.
D es falsa por ser cierta alguna de las anteriores.

4. Si $f\big((x_1,x_2,x_3),(y_1,y_2,y_3)\big) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_3$ es una forma bilineal, la forma cuadrática asociada, Q, verifica: A) La expresión matricial es única; B) Su matriz debe ser simétrica: C) La expresión de la forma cuadrática es un polinomio homogéneo de grado 3; D) Ninguna de las anteriores.

¿Expresión matricial de f?.

Si $\overline{x} = (x_1, x_2, x_3)$ e $\overline{y} = (y_1, y_2, y_3)$ son vectores de $\mathbb{R}^3$,

$$f(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 - x_1y_2 - x_2y_1 + 3x_1y_3 + 3x_3y_1 + x_3y_3 =$$
$$= (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{pmatrix}.$$

¿Expresión matricial de Q?.

$$Q(\overline{x}) = f(\overline{x}, \overline{x}) = x_1x_1 - x_1x_2 - x_2x_1 + 3x_1x_3 + 3x_3x_1 + x_3x_3 =$$
$$= (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 1 & -1 & 3 \\ -1 & 0 & 0 \\ 3 & 0 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}.$$

❖ $Q(\overline{x})$ se puede expresar de infinitas formas, como por ejemplo:

- $Q(\overline{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + x_3^2 = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & -2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
- $Q(\overline{x}) = x_1^2 - 2x_1x_2 + 6x_1x_3 + x_3^2 = (x_1 \quad x_2 \quad x_3) \begin{pmatrix} 1 & -3 & 4 \\ 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}$.
- .....

$\Rightarrow$ Las opciones A y B son falsas.

Cada sumando de la expresión de una forma cuadrática se obtiene como producto de dos números reales, las variables x_i e x_j, por el escalar a_{ij} de la matriz
$\Rightarrow$ Es un polinomio de segundo grado $\Rightarrow$ La opción C es falsa.
Sólo la opción D es cierta.

5. Si A es la matriz de la forma bilineal simétrica $f: \mathbb{R}^n \times \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$, la forma cuadrática asociada, Q, verifica: A) Su matriz es única; B) Su matriz es simétrica; C) Su expresión cuadrática es un polinomio homogéneo de grado n; D) Ninguna de las anteriores.

Este ejercicio es una generalización del anterior. Todo lo que se ha expuesto en el caso de $n = 3$ vale para $n \geq 3$ $\Rightarrow$ Sólo la opción D es correcta.
Observemos que en particular para $n = 2$ es cierta la opción C.

Ejemplo: $Q(\overline{x}) = \begin{pmatrix} x_1 & x_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}$.

6. Si Q es una forma cuadrática, es cierto que: A) $Q(\lambda\overline{u}) = \lambda^2 Q(\overline{u})$; B) La forma bilineal asociada a la cuadrática es única; C) Una forma cuadrática siempre tiene asociada una forma bilineal simétrica; D) A, B y C son falsas.

Si $Q: E \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática y $f: E \times E \to \mathbb{R}$ es la forma bilineal que la genera, entonces f es simétrica $\Rightarrow$ Las opciones B y C son ciertas.
$Q(\lambda\overline{u}) = f(\lambda\overline{u}, \lambda\overline{u}) = \lambda f(\overline{u}, \lambda\overline{u}) = \lambda^2 f(\overline{u}, \overline{u}) = \lambda^2 Q(\overline{u}) \Rightarrow$La opción A es cierta.

7. Si $\{\overline{e}_1, \overline{e}_2, \overline{e}_3\}$ es la base canónica de $\mathbb{R}^3$ y $Q: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ es una forma cuadrática, tal que $Q(\overline{e}_1) = 0$, $Q(\overline{e}_2) = -2$, $Q(\overline{e}_3) = 3$, $Q(\overline{e}_1 + \overline{e}_2) = -4$, $Q(\overline{e}_1 + \overline{e}_3) = 6$ y $Q(\overline{e}_2 + \overline{e}_3) = 5$, se verifica que la primera fila de la matriz de Q en la base canónica es: A) (0 –4 6); B) (0 –1 3/2); C) (0 –2 3); D) A, B y C son falsas.

❖ $Q: E \to \mathbb{R}$ es la forma cuadrática generada por la forma bilineal simétrica $f: E \times E \to \mathbb{R} \Leftrightarrow$ Es la aplicación $Q: E \to \mathbb{R}$, que verifica $Q(\overline{x}) = f(\overline{x}, \overline{x})$, $\forall \overline{x} \in E$.
La primera fila de la matriz de Q es $\left(f(\overline{e}_1,\overline{e}_1), f(\overline{e}_1,\overline{e}_2), f(\overline{e}_1,\overline{e}_3)\right)$.

¿$f(\overline{e}_1, \overline{e}_1)$?.

$Q(\overline{e}_1) = (\overline{e}_1, \overline{e}_1) = 0$.

¿$f(\overline{e}_1, \overline{e}_2)$?.

Se puede obtener a partir de $Q(\overline{e}_1 + \overline{e}_2)$ utilizando la definición de forma cuadrática y aplicación bilineal simétrica:

$$Q(\overline{e}_1 + \overline{e}_2) = f(\overline{e}_1 + \overline{e}_2, \overline{e}_1 + \overline{e}_2) = f(\overline{e}_1, \overline{e}_1 + \overline{e}_2) + f(\overline{e}_2, \overline{e}_1 + \overline{e}_2) =$$
$$= f(\overline{e}_1, \overline{e}_1) + f(\overline{e}_1, \overline{e}_2) + f(\overline{e}_2, \overline{e}_1) + f(\overline{e}_2, \overline{e}_2) = -4.$$

Sustituyendo los valores conocidos en la expresión anterior se obtiene
$0 + f(\overline{e}_1, \overline{e}_2) + f(\overline{e}_2, \overline{e}_1) - 2 = -4$, como f es simétrica $\Rightarrow f(\overline{e}_1, \overline{e}_2) = f(\overline{e}_2, \overline{e}_1) = -1$.

¿$f(\overline{e}_1, \overline{e}_3)$?.

$$Q(\overline{e}_1 + \overline{e}_3) = f(\overline{e}_1 + \overline{e}_3, \overline{e}_1 + \overline{e}_3) = f(\overline{e}_1, \overline{e}_1 + \overline{e}_3) + f(\overline{e}_3, \overline{e}_1 + \overline{e}_3) =$$
$$= f(\overline{e}_1, \overline{e}_1) + f(\overline{e}_1, \overline{e}_3) + f(\overline{e}_3, \overline{e}_1) + f(\overline{e}_3, \overline{e}_3) = 6.$$

Sustituyendo los valores conocidos en la expresión anterior se obtiene
$0 + f(\overline{e}_1, \overline{e}_3) + f(\overline{e}_3, \overline{e}_1) + 3 = 6$; como f es simétrica $f(\overline{e}_1, \overline{e}_3) = f(\overline{e}_3, \overline{e}_1) = 3/2$.

$\Rightarrow$ La primera fila de la matriz es (0 –1 3/2) $\Rightarrow$ Es cierta la opción B.
❖ De la misma manera se pueden calcular los demás elementos de la matriz.

8. Si $B = \{\vec{e}_1, \vec{e}_2\}$ y $B' = \{\vec{e}'_1, e'_2\}$ son bases de $\mathbb{R}^2$, tales que $\vec{e}'_1 = \vec{e}_1$ y $\vec{e}'_2 = \vec{e}_1 - \vec{e}_2$ y la matriz de una forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$ en la base B, es cierto que la matriz de Q en B' es: A) $\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}$; B) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$; C) $\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ La matriz A asociada a una forma bilineal $f : E \times E \to \mathbb{R}$ con la base $B = \{\vec{e}_1, ..., \vec{e}_n\}$ es congruente con la matriz A' asociada a f cuando se efectúa un cambio de base.

❖ A y A' son congruentes si existe una matriz P regular, tal que $A' = P^t AP$.

¿Expresión matricial de Q en base B?.

$$Q_B(\vec{x}) = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}.$$

¿Matriz P del cambio de la base B' a la base B?.

❖ Matriz cuyas columnas son las coordenadas de los vectores de B' en base B.

$$P = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}.$$

¿Expresión matricial de Q en base B'?.

$$Q_{B'}(\vec{x}) = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 0 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = x_1^2.$$

$\Rightarrow$ Sólo es correcta la opción C.

9. Si $f:\mathbb{R}^3\times\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ es una forma bilineal simétrica, tal que $f(\bar{e}_1,\bar{e}_1)=f(\bar{e}_2,\bar{e}_2)=f(\bar{e}_3,\bar{e}_3)=1$ y $f(\bar{e}_1,\bar{e}_2)=f(\bar{e}_2,\bar{e}_3)=f(\bar{e}_3,\bar{e}_1)=a$, siendo $B=\{\bar{e}_1,\bar{e}_2,\bar{e}_3\}$ una base de $\mathbb{R}^3$, la expresión analítica de la forma cuadrática asociada es: A) $x_1^2+x_2^2+x_3^2$; B) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2x_3$; C) $x_1^2+x_2^2+x_3^2+2ax_1x_2+2ax_2x_3+2ax_1x_3$; D) Ninguna de las anteriores.

$Q(x_1,x_2,x_3)=f\big((x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\big)$, para cualquier $(x_1,x_2,x_3)\in\mathbb{R}^3$.

$(x_1,x_2,x_3)=x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+x_3\bar{e}_3$.

Por ser f bilineal

$$f\big((x_1,x_2,x_3),(x_1,x_2,x_3)\big)=f(x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+x_3\bar{e}_3,x_1\bar{e}_1+x_2\bar{e}_2+x_3\bar{e}_3)=x_1^2f(\bar{e}_1,\bar{e}_1)+$$
$$+x_1x_2f(\bar{e}_1,\bar{e}_2)+x_1x_3f(\bar{e}_1,\bar{e}_3)+x_2x_1f(\bar{e}_2,\bar{e}_1)+x_2^2f(\bar{e}_2,\bar{e}_2)+x_2x_3f(\bar{e}_2,\bar{e}_3)+$$
$$+x_3x_1f(\bar{e}_3,\bar{e}_1)+x_3x_2f(\bar{e}_3,\bar{e}_2)+x_3^2f(\bar{e}_3,\bar{e}_3)=x_1^2+x_2^2+x_3^2+2a(x_1x_2+x_1x_3+x_2x_3).$$

$\Rightarrow$ La opción correcta es C.

10. Si $Q(x_1,x_2)=x_1^2+x_2^2+4x_1x_2$ es una forma cuadrática de $\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}$, se verifica que una base respecto a la cual Q se puede expresar como suma de cuadrados: A) No existe; B) Es $\{(1,-1),(1,1)\}$; C) Es $\{(1.0),(0,1)\}$; D) A, B y C son falsas.

❖ En este ejercicio se pide la base de la forma cuadrática canónica de $Q:E\to\mathbb{R}$.

❖ La forma cuadrática canónica es de la forma $Q(\bar{x})=\sum_{i=1}^{n}k_ix_i^2$, con $n=\text{Dim }E$.

¿Matriz simétrica asociada a Q?.

$$A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 2 & 1\end{pmatrix}.$$

¿Ecuación característica y valores propios?.

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & 2 \\ 2 & 1-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = -1, \lambda = 3.$$

¿Matriz diagonal equivalente A?.

$$\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}.$$

¿Subespacio asociado a $\lambda = -1$?.

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = -x_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ -1 \end{pmatrix}.$$

¿Base del subespacio asociado a $\lambda = -1$?.

$\{(1,-1)\}$.

¿Subespacio asociado a $\lambda = 3$?.

$$\begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow x_1 = x_2 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \alpha\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}.$$

¿Base del subespacio asociado a $\lambda = 3$?.

$\{(1,1)\}$.

¿Base de $\mathbb{R}^2$ respecto a la cual Q se puede expresar como suma de cuadrados?.

$B' = \{(1,-1),(1,1)\}$.

¿Expresión analítica de Q en la base B?.

$$(x_1, x_2)\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = -x_1^2 + 3x_2^2 \Rightarrow$$ Es correcta la opción B.

11. La matriz diagonal asociada a forma cuadrática $Q:\mathbb{R}^3\to\mathbb{R}$ definida por $Q(x_1,x_2,x_3)=ax_1^2+2ax_1x_2+ax_2^2+(a-1)x_3^2$ con $a\neq 0$ y $a\neq 1$, verifica: A) No existe; B) Tiene por vectores fila $(a-1,0,0)$, $(0,a-1,0)$, $(0,0,a+1)$; C) No es real; D) Ninguna de las anteriores.

¿Matriz simétrica asociada a Q?.

$$A=\begin{pmatrix} a & a & 0\\ a & a & 0\\ 0 & 0 & a-1\end{pmatrix}.$$

¿Valores propios de la matriz?.

$$\begin{vmatrix} a-\lambda & a & 0\\ a & a-\lambda & 0\\ 0 & 0 & a-1-\lambda\end{vmatrix}=0\Rightarrow \lambda_1=0;\ \lambda_2=a-1;\ \lambda_3=2a.$$

¿Es diagonalizable la matriz A?.

Sí, porque tiene distintos los tres autovalores ⇒ La opción A es falsa.

¿Matriz de la forma cuadrática diagonal asociada?.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & 2a\end{pmatrix}.$$

¿Ecuación de la forma cuadrática diagonal asociada?.

$$(x_1\ \ x_2\ \ x_3)\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0\\ 0 & a-1 & 0\\ 0 & 0 & 2a\end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}=(a-1)x_2^2+2ax_3^2\Rightarrow$$ La opción B es falsa.

La opción C es falsa siempre para las matrices simétricas.
⇒ Sólo es correcta la opción D.

12. El rango de la forma cuadrática estudiada en el ejercicio anterior es: A) 1 si $a = 1$; B) 2 si $a = -1$; C) 3 si $a \neq 1$ y $a \neq -1$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Rango de una forma cuadrática $Q(\overline{x})$ = Rango de la matriz A asociada a dicha forma.
❖ El rango de una forma cuadrática Q es un invariante.
❖ Invariantes de la forma cuadrática $Q : E \to \mathbb{R}$ son las propiedades de cualquier matriz asociada a la forma cuadrática, que no dependen de la base considerada en el espacio vectorial E.

¿Rango de A?.

$$|A| = \begin{vmatrix} a & a & 0 \\ a & a & 0 \\ 0 & 0 & a-1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \text{rg } A \leq 2 \Rightarrow \text{ La opción C es falsa.}$$

$$\begin{vmatrix} a & 0 \\ 0 & a-1 \end{vmatrix} = a(a-1) \Rightarrow \text{rg } A = 2 \text{ si } a \neq 1 \text{ y } a \neq 0.$$

En la opción A es $a = 1 \Rightarrow$ rg $A = 1$ y A es cierta.
En la opción B es $a = -1$, es decir, es $a \neq 1$ y $a \neq 0 \Rightarrow$ B es cierta.
Se podía haber hecho el mismo estudio a partir de la matriz diagonal porque el rango es un invariante de Q, y la matriz diagonal es la matriz asociada a Q cuando se expresa en la base determinada por los autovectores.

13. La signatura de la forma cuadrática de los ejercicios anteriores es: A) 3 si $a > 1$; B) 1 si $a \in (-1, 1]$; C) 0 si $a < -1$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ La signatura de una forma cuadrática es el número de términos positivos que figuran en la diagonal principal de cualquiera de las matrices asociadas que posee.
❖ La signatura es un invariante.
❖ Cuando tenemos la matriz diagonal asociada el estudio es muy fácil.

¿Matriz de la forma cuadrática diagonal asociada?.

$$\Lambda = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & a-1 & 0 \\ 0 & 0 & 2a \end{pmatrix}.$$

¿Matriz Λ *cuando* $a > 1$*?.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{positivo} & 0 \\ 0 & 0 & \text{positivo} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{La signatura es } 2 \Rightarrow \text{La opción A es falsa.}$$

¿Matriz Λ *cuando* $a \in (-1,1]$*?.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{negativo ó } 0 & 0 \\ 0 & 0 & \text{negativo, positivo ó } 0 \end{pmatrix} \Rightarrow$$ El valor de la signatura depende del punto del intervalo a que pertenece $a \Rightarrow$ No es correcta la opción B.

¿Matriz Λ *cuando* $a < -1$*?.*

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & \text{negativo} & 0 \\ 0 & 0 & \text{negativo} \end{pmatrix} \Rightarrow \text{La signatura es } 0 \Rightarrow \text{Es correcta la opción C.}$$

Ejercicios relativos a:

"Clasificación de formas cuadráticas."

1. La forma cuadrática $Q(x_1, x_2, x_3) = 2x_1x_2 + 4x_1x_3 + x_2^2 - 2x_2x_3$ es: A) Definida positiva; B) Semidefinida positiva; C) Indefinida; D) A, B y C son falsas.

❖ La condición necesaria y suficiente para que una forma cuadrática sea definida positiva es que todas las raíces características de la matriz A sean positivas.

¿Matriz simétrica asociada a la forma cuadrática dada?.

$$A = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{pmatrix}.$$

¿Ecuación característica?.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = 0.$$

¿Valores propios?.

$$\begin{vmatrix} -\lambda & 1 & 2 \\ 1 & 1-\lambda & -1 \\ 2 & -1 & -\lambda \end{vmatrix} = -\lambda^3 + \lambda^2 + 6\lambda - 8 = (\lambda - 2)(-\lambda^2 - \lambda + 4) = 0 \Rightarrow$$

$$\Rightarrow (\lambda - 2) = 0; (-\lambda^2 - \lambda + 4) = 0 \Rightarrow \lambda_1 = 2 > 0; \lambda_2 = \frac{\sqrt{17} - 1}{2} > 0; \lambda_3 = \frac{-\sqrt{17} - 1}{2} < 0.$$

Hay autovalores positivos y negativos ⇒ Es indefinida y es correcta la opción C.

❖ A la misma conclusión se habría llegado si se hubiera utilizado otro criterio de clasificación, por ejemplo, el criterio de Sylvester:

❖ Criterio de Sylvester

1. La condición necesaria y suficiente para que la forma Q sea definida positiva es que se verifique. $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $\Delta_{n-1} > 0$, $|A| > 0$.

2. La condición necesaria y suficiente para que la forma Q sea definida negativa es que se verifique $\Delta_1 < 0$, $\Delta_2 > 0$, $\Delta_3 < 0$, ...

3. Si $|A| = 0$, y se cumplen la condición 1 ó la condición 2 hasta el último Δ_p distinto de cero, la forma Q será semidefinida positiva o semidefinida negativa respectivamente.

4. En otros casos la forma Q será indefinida o de signo variable.

$$|A| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & -1 & 0 \end{vmatrix} = -8; \quad \Delta_2 = \begin{vmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix} = 1; \quad \Delta_1 = |0| = 0 \Rightarrow \text{Es indefinida.}$$

2. Utilizando el criterio de Sylvester se puede afirmar que la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de expresión $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2$, es: A) Semidefinida negativa; B) Semidefinida positiva; C) Indefinida; D) Ninguna de las anteriores.

¿Matriz simétrica asociada a Q?.

$$Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{pmatrix}$$

¿Determinante de A?.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 1 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow$$ No puede ser definida positiva ni negativa.

Aplicación del criterio de Sylvester.

$|A| = 0;\ \Delta_1 = |1| > 0 \Rightarrow$ Es semidefinida positiva $\Rightarrow$ Es cierta la opción B.

❖ Una forma cuadrática Q es definida positiva si $Q(\overline{x}) = X^t AX > 0,\ \overline{x} \neq \overline{0}$.

En este caso sería suficiente ver que $Q(x_1, x_2) = x_1^2 + x_2^2 - 2x_1x_2 = (x_1 - x_2)^2$ que es mayor que 0 si $x \neq \overline{0}$, por ejemplo cuando $(x_1, x_2) = (1,1)$.

3. Para que la forma cuadrática $Q : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$, de expresión $Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + ax_1x_2 + 6x_2^2$ sea definida positiva el valor de a debe verificar: A) $|a| \leq 4\sqrt{3}$; B) $|a| < 4\sqrt{3}$; C) $|a| < 2\sqrt{3}$; D) Ninguna de las anteriores.

¿Matriz simétrica asociada a Q?.

$$Q(x_1, x_2) = 2x_1^2 + ax_1x_2 + 6x_2^2 = (x_1 \quad x_2)\begin{pmatrix} 2 & a/2 \\ a/2 & 6 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 2 & a/2 \\ a/2 & 6 \end{pmatrix}.$$

¿Ecuación característica de Q?.

$$\begin{vmatrix} 2-\lambda & a/2 \\ a/2 & 6-\lambda \end{vmatrix} = (2-\lambda)(6-\lambda) - a^2/4 = \lambda^2 - 8\lambda + \left(12 - a^2/4\right) = 0.$$

¿Qué condición debe cumplir a para que las raíces de la ecuación sean positivas?.

Para que las raíces sean positivas debe ser $8 \pm \sqrt{64 - 4(12 - a^2/4)} > 0$, o bien,

$\sqrt{16 + a^2} < 8 \Rightarrow a^2 < 48 \Rightarrow |a| < 4\sqrt{3} \Rightarrow$ La opción correcta es B.

4. Si $f: \mathbb{R}^2 \times \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ es una forma bilineal tal que, $f(\overline{x}, \overline{y}) = x_1y_1 - 4x_1y_2 + 3x_2y_2$, la forma cuadrática asociada Q es: A) Definida positiva; B) Definida negativa; C) Semidefinida positiva; D) Semidefinida negativa; E) Indefinida.

¿Expresión matricial de f?.

$$f(\overline{x},\overline{y}) = x_1y_1 - 4x_1y_2 + 3x_2y_2 = (x_1, x_2)\begin{pmatrix} 1 & -4 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \end{pmatrix}.$$

¿Matriz de la forma bilineal simétrica que genera Q?.

Para que f genere una forma cuadrática debe ser simétrica, es decir, verificar $-4x_1y_2 = -2x_1y_2 - 2x_2y_1$.

$$\begin{pmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{pmatrix}.$$

¿Clasificación de la forma cuadrática obtenida?.

Ecuación característica: $\begin{vmatrix} 1-\lambda & -2 \\ -2 & 3-\lambda \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \lambda = 2 \pm \sqrt{5}.$

Como hay autovalores positivos y negativos la forma cuadrática es indefinida $\Rightarrow$ Es correcta la opción E.

5. Para que la forma cuadrática $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 4x_2^2 + 2x_3^2 + 2ax_1x_2 + 2x_1x_3$ sea semidefinida positiva se debe verificar: A) $|a| = 2$; B) $a > |\sqrt{2}|$; C) $|a| = \sqrt{2}$; D) No es necesaria ninguna de las anteriores.

¿Expresión matricial de Q?.

$$Q(x_1,x_2,x_3) = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}.$$

❖ Criterio de Sylvester: Si $|A| = 0$, y $\Delta_1 > 0$, $\Delta_2 > 0$, ..., $\Delta_{n-1} > 0$ hasta el último Δ_p distinto de cero, la forma Q es semidefinida positiva.

¿Para qué valores de a es $|A| = 0$?.

$$\begin{vmatrix} 1 & a & 1 \\ a & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = -2a^2 + 4$$

Para que $-2a^2 + 4 = 0$, $a = \pm\sqrt{2} \Rightarrow$ Sólo tiene posibilidad de ser correcta la opción C, pero hay que ver si se cumple el resto de la condición cuando $a = \pm\sqrt{2}$.

¿Cómo son $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}, \lvert A \rvert$ si $a = \sqrt{2}$ *?.*	*¿Cómo son* $\Delta_1, \Delta_2, \ldots, \Delta_{n-1}, \lvert A \rvert$ si $a = -\sqrt{2}$ *?.*
$\Delta_1 = \lvert 1 \rvert > 0$	$\Delta_1 = \lvert 1 \rvert > 0$
$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} \\ \sqrt{2} & 4 \end{vmatrix} = 0$	$\Delta_2 = \begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{2} \\ -\sqrt{2} & 4 \end{vmatrix} = 0$
$\begin{vmatrix} 1 & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$	$\begin{vmatrix} 1 & -\sqrt{2} & 1 \\ -\sqrt{2} & 4 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} = 0$

Hasta el último Δ_p distinto de cero son positivos todos $\Rightarrow$ Q es semidefinida positiva para $a = \pm\sqrt{2} \Rightarrow$ Sólo es correcta la opción C.

6. Si en un espacio vectorial de dimensión n, rg(Q) es el rango de la forma cuadrática Q, y sig(Q) la signatura de dicha forma cuadrática, entonces se veri-

fica que Q es semidefinida negativa si: A) $\text{rg}(Q) < n$ y $\text{sig}(Q) = 0$; B) $\text{rg}(Q) = n$ y $\text{sig}(Q) = 0$; C) $\text{rg}(Q) \neq \text{sig}(Q)$ y $\text{sig}(Q) \neq 0$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Si E un espacio vectorial de dimensión n, $\text{rg}(Q)$ el rango de la forma cuadrática $Q : E \to \mathbb{R}$, y $\text{sig}(Q)$ la signatura de dicha forma cuadrática, entonces:

Q es definida positiva si: $\text{rg}(Q) = \text{sig}(Q) = n$.

Q es definida negativa si: $\text{rg}(Q) = n$ y $\text{sig}(Q) = 0$.

Q es semidefinida positiva si: $\text{rg}(Q) = \text{sig}(Q) < n$.

Q es semidefinida negativa si: $\text{rg}(Q) < n$ y $\text{sig}(Q) = 0$.

Q es indefinida si: $\text{rg}(Q) \neq \text{sig}(Q)$ y $\text{sig}(Q) \neq 0$.

Es un ejercicio teórico, cuya respuesta se encuentra en el criterio expuesto de clasificación de formas cuadráticas por invariantes.
$\Rightarrow$ Es correcta la opción A.

7. La forma cuadrática $Q(x_1, x_2, x_3) = x_1^2 + 2x_2^2 + 2x_3^2 + 4x_2x_3$ es: A) Definida positiva; B) Semidefinida positiva; C) Indefinida; D) Semidefinida negativa.

¿Expresión matricial de Q?.

$$Q(x_1, x_2, x_3) = (x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \Rightarrow A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{pmatrix}.$$

¿Rango de Q?.

$$\begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 2 \end{vmatrix} = 0 \text{ y } \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 2 \end{vmatrix} \neq 0 \Rightarrow \text{rg}(Q) = 2.$$

¿Ecuación característica de Q?.

$$|A-\lambda I|=\begin{vmatrix}1-\lambda & 0 & 0\\ 0 & 2-\lambda & 2\\ 0 & 2 & 2-\lambda\end{vmatrix}=(1-\lambda)(2-\lambda)^2-4(1-\lambda)=(1-\lambda)(-4\lambda+\lambda^2)=0$$

$$\Rightarrow \lambda_1=0;\lambda_2=1;\lambda_3=4\Rightarrow \text{sig}(Q)=2.$$

¿Clasificación de la forma cuadrática?.

$\text{rg}(Q)=\text{sig}(Q)=2<3=n.$

$\Rightarrow$ La forma es semidefinida positiva y sólo es correcta la opción B.

8. Para que $Q(x_1,x_2,x_3)=x_1^2+4x_2^2+2x_3^2+2ax_1x_2+2x_1x_3$ sea semidefinida positiva, a puede tomar los valores: A) ± 2; B) $\sqrt{2}$; C) $\pm\sqrt{2}$; D) Ninguno de los anteriores.

¿Expresión matricial de Q?.

$$Q(x_1,x_2,x_3)=(x_1 \quad x_2 \quad x_3)\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\ x_2\\ x_3\end{pmatrix}\Rightarrow A=\begin{pmatrix}1 & a & 1\\ a & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{pmatrix}.$$

Para que Q sea semidefinida positiva debe verificarse que $\text{rg}(Q)=\text{sig}(Q)=r<n$, es decir, $r<3$.

$$|A|=\begin{vmatrix}1 & a & 1\\ a & 4 & 0\\ 1 & 0 & 2\end{vmatrix}=8-4-2a^2=0\Rightarrow a_1=\sqrt{2},a_2=-\sqrt{2}.$$

Si $a_1 = \sqrt{2}$, los autovalores λ son las raíces de la ecuación:

$$\begin{vmatrix} 1-\lambda & \sqrt{2} & 1 \\ \sqrt{2} & 4-\lambda & 0 \\ 1 & 0 & 2-\lambda \end{vmatrix} = (4-\lambda)(1-\lambda)(2-\lambda) - (4-\lambda) - 2(2-\lambda) =$$

$$= -\lambda(\lambda^2 - 7\lambda + 11),$$

cuyas soluciones son: $\lambda_1 = 0, \lambda_2 = \dfrac{7+\sqrt{5}}{2} > 0, \lambda_3 = \dfrac{7-\sqrt{5}}{2} > 0.$

El mismo resultado se obtendría para $a_2 = -\sqrt{2}$.
$\Rightarrow$ Para $a_1 = \pm\sqrt{2}$ un autovalor es nulo y dos positivos $\Rightarrow$ rg(Q) = sig(Q) = $= 2 < 3 = n$.
$\Rightarrow$ La forma es semidefinida positiva y sólo es correcta la opción C.

9. La forma cuadrática estudiada en los ejercicios 11, 12 y 13 de cap. 7-2 es: A) Definida positiva si $a > 1$; B) Definida negativa si $a < -1$; C) Semidefinida positiva si $a = 1$; D) Semidefinida negativa si $a = -1$; E) Indefinida en los demás casos.

Valor de a	Signatura	Rango	Tipo de forma
$a > 1$	2	<3	Semidefinida positiva
$a < -1$	0	<3	Semidefinida negativa
$a = 1$	1	<3	Semidefinida positiva
$a = -1$	0	<3	Semidefinida negativa
$1 > a > -1$	2 ó 0	<3	Semidefinida negativa o positiva

Para el último caso se pueden dar las siguientes situaciones:

Valor de a	Signatura	Rango	Tipo de forma
$a = 0$	0	1	Semidefinida negativa
$-1 < a < 0$	0	2	Semidefinida negativa
$0 < a < 1$	2	2	Semidefinida positiva

$\Rightarrow$ Son ciertas las opciones C y D.

CAPÍTULO 8

EL PROBLEMA DE LA PROGRAMACIÓN LINEAL

Ejercicios relativos a:

"El problema de la programación lineal: Convexo de soluciones y las restricciones que lo limitan."

1. Un banco propone invertir en dos fondos, que llamaremos A y B. Las condiciones para invertir simultáneamente en los dos son que en el fondo A hay que invertir como mucho 3 veces lo que en el fondo B y la inversión en A debe ser, al menos, tanto como en B. Se garantiza que los beneficios de A son del 8% y los de B del 5%. Como mucho queremos invertir 10000 € y queremos maximizar los beneficios. Entonces, si x es el dinero que invertimos en el fondo A e y es el que invertimos en B, se cumple que: A) $3y - x$ es una función objetivo de este problema; B) No podemos determinar la función objetivo sin más datos; C) Una función objetivo es $8x + 5y$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ El problema principal de la programación lineal consiste en optimizar una función lineal F, llamada función objetivo

$$\text{óptimo } F = c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n,$$

siendo $c_i \in \mathbb{R}$. Esto significa calcular sus valores óptimos (máximos o mínimos), también llamados extremos, sujeta a ciertas restricciones, igualdades ó desigualdades lineales, de la forma:

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ \cdots \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdots \\ a_{s1}x_1 + a_{s2}x_2 + \cdots + a_{sn}x_n = b_s \\ a_{s+1,1}x_1 + a_{s+1,2}x_2 + \cdots + a_{s+1,n}x_n \leq b_{s+1} \\ \cdots \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdots \\ a_{r1}x_1 + a_{r2}x_2 + \cdots + a_{rn}x_n \leq b_r \\ a_{r+1,1}x_1 + a_{r+1,2}x_2 + \cdots + a_{r+1,n}x_n \geq b_{r+1} \\ \cdots \qquad\qquad \cdots \qquad\qquad \cdots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n \geq b_m \end{cases}$$

con a_{ij}, $b_i \in \mathbb{R}$ y las b_i no negativas, y siendo $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, ..., $x_n \geq 0$.

❖ Solución óptima es aquella solución factible que optimiza (maximiza o minimiza) la función objetivo.

Queremos optimizar los beneficios, luego la función objetivo hace referencia a ellos. Las ganancias que obtenemos en los fondos de inversión son, si x es el dinero que invertimos en el fondo A e y es el que invertimos en B

$$\frac{8}{100}x + \frac{5}{100}y$$

Como es lo mismo encontrar el máximo de esta función o de esta función multiplicada por un número, para simplificar vamos a eliminar los denominadores multiplicando por 100 y nos queda $8x + 5y$, que es una función objetivo.

⇒ La solución correcta es C.

2. En el ejercicio anterior: A) $x - 3y \geq 0$ es una restricción; B) $x - 3y \leq 0$ es una restricción; C) $x \geq 0$, $y \geq 0$ son restricciones; D) Ninguna de las anteriores.

Vamos a escribir las condiciones de estos fondos de inversión en lenguaje matemático. Si en el fondo A hay que invertir como mucho 3 veces lo que en el fondo B, esto significa que x debe ser menor o igual que $3y$, o que $x \leq 3y \Leftrightarrow x - 3y \leq 0$. Además, la inversión en A debe ser, al menos, tanto como en B, es decir $y \leq x \Leftrightarrow x - y \geq 0$. Si como mucho queremos invertir 10000 €, entonces deber ser $x + y \leq 10000$. Y quedan dos últimas condiciones, que son invertir siempre cantidades de dinero positivas, o $x \geq 0$, $y \geq 0$.

$\Rightarrow$ B es correcta y también lo es C.

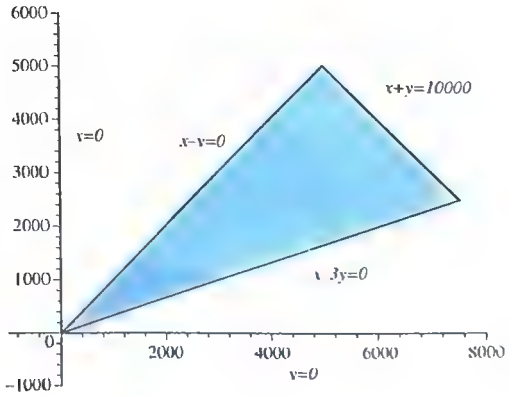
3. En el ejercicio 1 del cap. 8-1, se verifica: A) La restricción $y \geq 0$ es superflua; B) No hay restricciones superfluas; C) Las restricciones $x - 3y \leq 0$, $x - y \geq 0$ son no superfluas; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Los puntos $(x_1, x_2, ..., x_n) \in \mathbb{R}^n$ que satisfacen todas las restricciones son denominados soluciones factibles.

❖ Conjunto factible es el subconjunto de $\mathbb{R}^n$ formado por las soluciones factibles. También se denomina región de posibilidad o convexo solución.

Una restricción es superflua si su eliminación no significa una modificación del conjunto factible.

Como las respuestas hacen referencia a las restricciones, partimos del ejercicio anterior. Queremos determinar cuáles son las restricciones superfluas. En este caso, lo mejor es representar gráficamente la región factible (en gris) y así determinamos cuáles son superfluas y



cuáles no. En la figura podemos ver que sobran las restricciones $x \geq 0$ e $y \geq 0$. El resto de las restricciones son no superfluas.

$\Rightarrow$ A es correcta y también lo es C.

4. Un servicio de reparación de ordenadores está dividido en dos departamentos, en el 1.º se realiza el estudio del problema del ordenador y en el 2.º se repara. Generalmente, hay dos tipos distintos de problemas, que llamamos A y B. Para cada uno del tipo A se utilizan 2 horas del 1.er departamento y 5 del 2.º y para los del tipo B se emplean 4 horas del 1.er departamento y 2 horas del 2.º. Cada problema A deja 60 € de beneficios y en cada problema B se ganan 90 €. Se desea conocer cuántos problemas de cada tipo hay que resolver en una semana para rentabilizar al máximo los beneficios, teniendo en cuenta que en el taller A hay 2 trabajadores y en el B hay 3 y que cada uno de ellos trabaja un máximo de 40 horas semanales. Entonces, si para cada semana, x es el número de ordenadores con el problema A e y el número de ordenadores con el problema B: A) $2x - 3y$ es la función objetivo de este problema; B) No podemos determinar la función objetivo sin más datos; C) La función objetivo es $9x - 6y$; D) Ninguna de las anteriores.

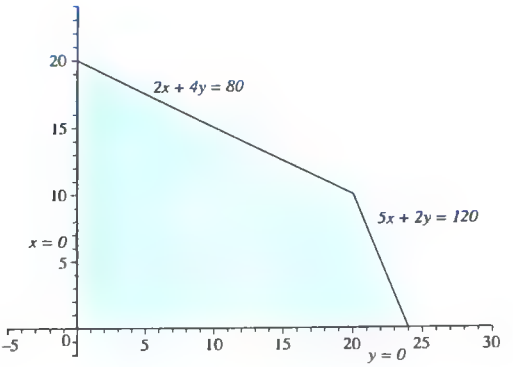
Queremos determinar cuándo obtenemos el máximo de beneficio reparando ordenadores. Lo que tenemos que decidir es el número de ordenadores con los problemas A o B que reparamos. En este caso, parece lógico llamar x al número de ordenadores con el problema A que arreglamos e y al número de ordenadores con el problema B que arreglamos. Sabemos que el beneficio de cada problema A es 60 € y de cada problema B es 90 €. Es decir $60x + 90y$, que es la función objetivo. La opción correcta es D. Como en el ejercicio 1, se puede simplificar para realizar los cálculos, y podemos tomar $2x + 3y$ como función objetivo.

5. En el problema anterior: A) $2x + 4x \geq 80$ es una restricción; B) No hay restricciones superfluas; C) Hay 4 restricciones; D) Ninguna de las anteriores.

¿Restricciones en lenguaje simbólico?.

El primer departamento necesita 2 horas para cada problema A y 4 para los problemas B. El segundo departamento utiliza 5 horas para los problemas A

y 2 para los B. Como en el primer departamento se trabaja un máximo de 80 horas a la semana (hay 2 personas, con una jornada de 40 horas cada una) y en el segundo el máximo son 120 horas (hay 3 personas), entonces dos restricciones deben ser



$$2x + 4y \leq 80$$
$$5x + 2y \leq 120$$

Además, como el número de ordenadores que se tienen que arreglar de cada tipo siempre es mayor o igual que 0, tenemos que añadir las dos restricciones x, $y \geq 0$.

C es correcta y A falsa. Para ver si B es correcta representamos la región factible, y observamos que todas las restricciones son necesarias para delimitar la región factible (representada en gris) $\Rightarrow$ B también es correcta.

6. En una fábrica de juguetes se fabrican dos productos que denotaremos X e Y. Por motivos de demanda, se fabrican igual o mayor número de unidades del producto X que del producto Y. Se emplean 20 minutos para fabricar el producto X y 40 minutos para fabricar el producto Y. Cada día las maquinas donde se fabrican estos juguetes trabajan 3 horas. Cada producto X se vende en el mercado a 10 €, produciendo un beneficio de 6 €, y el producto Y se vende a 7 € y el beneficio obtenido es de 5 €. Se desea minimizar los gastos. Entonces: A) $z = 4x_1 + 2x_2$ es la función objetivo; B) No podemos determinar la función objetivo sin más datos; C) El problema resultante tiene 3 variables; D) Ninguna de las anteriores.

Si x_1 es el número de unidades del producto X que se fabrican en el día y x_2 el número de unidades del producto Y que se fabrican en el día, las restricciones del problema planteado se recogen en la tabla siguiente:

	De X	De Y		
Unidades	x_1	x_2	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$	*Restricción*
Limitaciones			$20x_1 + 40x_2 = 180$	*Restricción*
Relación			$x_2 \leq x_1$	*Restricción*
Gastos	$4x_1$	$2x_2$	$z = 4x_1 + 2x_2$	*F. objetivo*

La primera restricción es obvia, ya que significa que no se pueden fabricar unidades negativas de los productos. Teniendo en cuenta que las máquinas pueden trabajar 3 horas (es decir, 180 minutos) y el tiempo que se emplea en fabricar cada uno de los productos, tenemos la segunda restricción. La restricción $x_2 \leq x_1$ está impuesta por las condiciones de mercado. Finalmente, la función objetivo está determinada por los gastos (precio de venta – beneficios) que se ocasionan en cada uno de los juguetes.

Se trata de resolver el problema de programación lineal: Min $z = 4x_1 + 2x_2$

sujeto a las restricciones: $20x_1 + 40x_2 = 180$, $x_1 \geq x_2$, $x_1, x_2 \geq 0$.

$\Rightarrow$ Sólo es correcta la respuesta A.

7. Se desea invertir no más de 1.000 € en acciones. Se acuerda invertir en una compañía X como máximo 600 €, y al menos 200 € en otra compañía Y. Los beneficios de X serán el 10% y en Y del 7%. Si se desea maximizar los beneficios anuales, entonces en el problema de programación lineal que se plantea: A) Existen dos restricciones superfluas; B) Existe una restricción superflua; C) La función objetivo es $z = 0{,}10x_1 + 0{,}07x_2$; D) Ninguna de las anteriores.

En la siguiente tabla representamos todos los datos del problema:

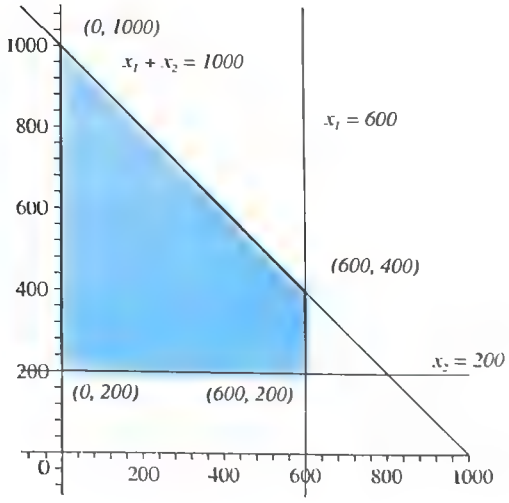
	En X	En Y		
Inversión	x_1	x_2	$x_1 \geq 0, x_2 \geq 0,$ $x_1 + x_2 \leq 1000$	*Restricciones*
Limitaciones			$x_1 \leq 600, x_2 \geq 200$	*Restricciones*
Beneficios	$0{,}10\,x_1$	$0{,}07\,x_2$	$z = 0{,}10x_1 + 0{,}07x_2$	*F. objetivo*

Si llamamos x_1 y x_2 a las cantidades que invertimos en X y en Y, que se invierta como mucho 1.000 € en acciones es la primera restricción. Las dos siguientes restricciones representan que se invierta en X como máximo 600 €, y al menos 200 € en Y. La información sobre los beneficios nos da la función objetivo. El problema resultante es: Max $z = 0{,}10x_1 + 0{,}07x_2$

sujeto a las restricciones $x_1 + x_2 \leq 1000$, $x_1 \leq 600$, $x_2 \geq 200$, $x_1, x_2 \geq 0$.

$\Rightarrow$ La opción C es correcta.

Inmediatamente podemos detectar que hay una restricción superflua, que es $x_2 \geq 0$ (porque también debe ser $x_2 \geq 200$). Para ver si hay más restricciones superfluas, representamos la región factible. Primero las restricciones, determinando los vértices después como los puntos de intersección de las restricciones que la delimitan.



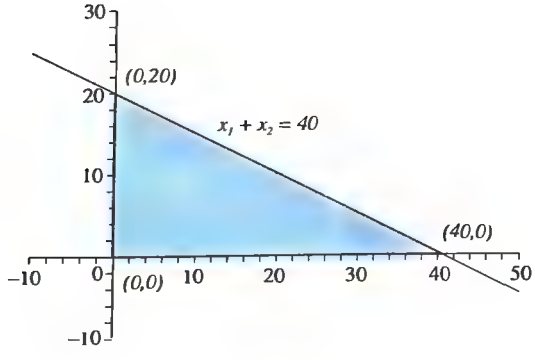
Los vértices son (0, 200), (0, 1000), (600, 400) y (600, 200). Observamos que no existen más restricciones superfluas $\Rightarrow$ A es falsa y B es correcta.

8. En una quesería se elaboran dos tipos de queso, de oveja y de cabra. Debido a las capacidades de los depósitos, los kilos de queso de oveja elaborados más el doble de los kilos de queso de cabra deben ser menor que 40. Cada kilo de queso de oveja da un beneficio de 150 céntimos de euro y el beneficio del kilo de queso de cabra es 3 €. Se desea calcula el máximo de los beneficios. De entre las opciones siguientes, son correctas: A) La región factible es un rectángulo; B) La región factible es un triángulo; C) La región factible es un segmento; D) Ninguna de las anteriores.

Si llamamos x_1 al número de kilos de queso de oveja y x_2 al número de kilos de queso de cabra el problema de programación lineal que resulta es:

"Calcular el max de $z = 150x_1 + 300x_2$ con las restricciones:

$$x_1 + 2x_2 \leq 40,\ x_1 \geq 0,\ x_2 \geq 0".$$

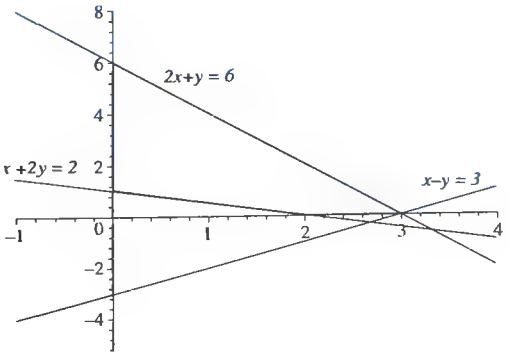


Los beneficios están expresados en la función objetivo. La primera restricción es la condición impuesta por la capacidad de los depósitos. La condición de que el número de kilos a elaborar de cada tipo debe ser mayor o igual que 0 está expresada en las dos últimas restricciones.

Si representamos estas restricciones, tenemos el polígono convexo de vértices: $A(0,0)$, $B(0,20)$ y $C(40,0)$, es decir, B es cierta y A y C son falsas.

9. En el sistema de desigualdades $I_1 : x > 0$; $I_2 : y > 0$; $I_3 : x - y <$ $I_4 : 2x + y < 6$; $I_5 : x + 2y > 2$ son superfluas: A) I_3 e I_4; B) I_4 e I_5; C) I_5; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Para determinar la restricción superflua representamos gráficamente los semiplanos definidos por cada una de las restricciones.



En la gráfica se han señalado las rectas correspondientes a las restricciones. En ellas, observamos que la restricción superflua es $I_3 : x - y < 3 \Rightarrow$ La opción cierta es D.

10. En un problema de programación lineal el conjunto de soluciones: A) No puede ser vacío; B) Puede estar definido por más condiciones de las necesarias; C) Siempre está acotado; D) Ninguna de las anteriores.

Para determinar la respuesta o respuestas correctas, vamos a analizar cada una de las afirmaciones.

❖ El problema de programación lineal puede no tener solución.

Ocurre si la región factible es vacía, como la delimitada por las restricciones $x + y \leq -1, x, y \geq 0$.

(se deja como ejercicio su representación gráfica) $\Rightarrow$ A es falsa.

Además, pueden existir restricciones redundantes (como en el ejercicio 7 del cap. 8-1 $\Rightarrow$ B es cierta.

❖ El conjunto de soluciones o región factible no siempre está acotado.

Por ejemplo, si las únicas restricciones son $x, y \geq 0$, la región factible es el primer cuadrante del plano $\Rightarrow$ C es también falsa.

11. En un problema de programación lineal se verifica: A) Cuando el convexo de soluciones es cerrado y acotado, la función objetivo no puede alcanzar el óptimo en un punto que no sea un vértice; B) Cuando el convexo de soluciones no es acotado, la función objetivo puede no alcanzar el óptimo en el conjunto; C) Si el convexo de soluciones no es acotado el óptimo no existe; D) Ninguna de las anteriores.

La opción A es falsa porque puede alcanzarse el óptimo en dos vértices de la región factible y por tanto se alcanza en todos los puntos del segmento que definen. B es cierta porque si consideramos la región no acotada definida por $x_1 \geq 0$ y $x_2 \geq 0$ la función objetivo $z = x_1 + x_2$ entonces, z alcanza el mínimo pero no el máximo. C es falsa, por ejemplo, en el ejemplo anterior el conjunto convexo es no acotado y sin embargo la función z alcanza el mínimo en el (0, 0).

Ejercicios relativos a:

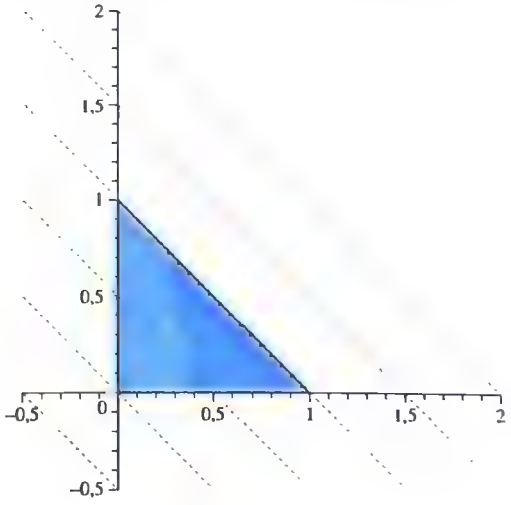
"Resolucion geométrica del problema de la programación lineal en dos variables."

1. En un problema de programación lineal el conjunto factible es el convexo formado por el triángulo de vértices: (0, 0), (0, 1) y (1, 0). Si la función objetivo (que alcanza el mínimo) es paralela a la recta $x + y = 1$, entonces el valor mínimo lo alcanza en: A) Cualquier punto de la hipotenusa; B) El punto (0, 0); C) El punto (1, 0); D) Ninguna de las anteriores.

❖ La función objetivo f en un problema de programación lineal en $\mathbb{R}^n$, es siempre de la forma $f = c_1x_1 + ... + c_nx_n$, siendo $c_i \in \mathbb{R}$ y x_i las variables.

En nuestro caso se trata de un problema de programación lineal en el plano y por tanto la función objetivo tiene forma de recta. Si la función objetivo es paralela a la recta $x + y = 1$ es $f = x + y$.

El gráfico del convexo determinado por dichos vértices, es:



Es suficiente analizar dicho gráfico (donde las funciones de la forma $x + y = k$ se han representado en trazo discontinuo) para comprobar que la opción correcta es B, ya que por este vértice pasa la recta de la forma $x + y = k$ de menor valor para k.

2. En el problema del ejercicio anterior la respuesta a ¿Dónde se alcanzaría el máximo? es: A) Nunca se alcanza; B) En un único punto de la región factible; C) En infinitos puntos de la región factible; D) No se puede determinar.

❖ Si en un problema de programación lineal se alcanza el óptimo, lo hace en algún o algunos puntos de la región factible.

Si observamos la gráfica anterior y las distintas rectas de la forma $x + y = k$, determinada por la función objetivo f, vemos que el máximo valor de k que se alcanza en puntos de la región factible es $k = 1$ y éste se alcanza en cualquier punto de la hipotenusa del triángulo que determina la región factible.

⇒ La única opción cierta es C.

3. Resolviendo geométricamente el ejercicio 4 del cap. 8-1, se puede afirmar que: A) El máximo nunca se alcanza; B) El máximo sólo se alcanza en (20, 10); C) El máximo se alcanza en infinitos puntos de la región factible; D) Ninguna de las anteriores.

¿Expresión matemática del problema?.

Max $F = 2x + 3y$ con las restricciones $2x + 4y \leq 80$, $5x + 2y \leq 120$, $x, y \geq 0$.

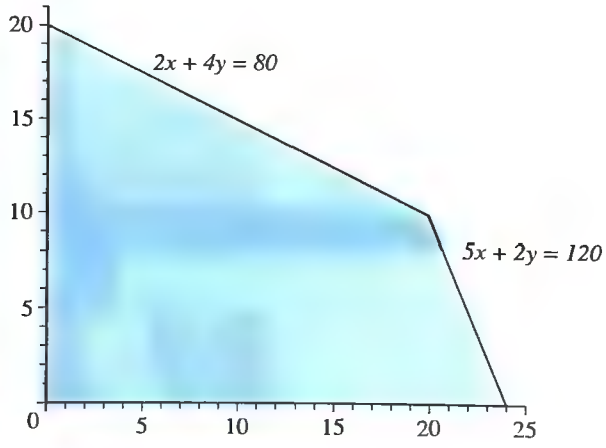
❖ Se puede determinar el máximo de una función objetivo si se representa la función objetivo y la región factible.

❖ Proceso para representar el conjunto factible determinado por las restricciones de la forma $a_{11}x_1 + a_{21}x_2 \leq b_1$ (semiplano):

1. Se representa la recta asociada a la restricción, $a_{11}x_1 + a_{21}x_2 = b_1$.
2. Para elegir el semiplano, se calcula el valor que toma un punto cualquiera de uno de los semiplanos y si verifica la restricción se trata de ese semiplano, si no es así (es decir, se verifica la restricción opuesta) el semiplano buscado es el opuesto.

(Para las restricciones del tipo $a_{21}x_1 + a_{22}x_2 \geq b_2$, se siguen los mismos pasos).

En este caso, si se representan las restricciones $2x + 4y \leq 80$, $5x + 2y \leq 120$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ resulta el convexo:



❖ En un problema de programación lineal de dos variables, cada vértice del conjunto factible es la intersección de dos rectas.

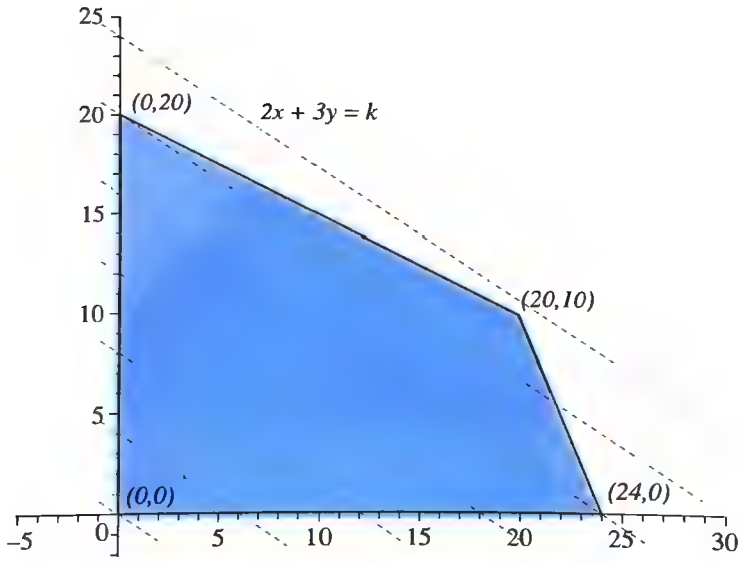
❖ Para calcular los vértices de la región factible, se calculan los puntos de intersección de las rectas que intervienen en cada punto que es vértice.

¿Vértices?.

- (0, 0) que es intersección de las rectas $x = 0$, $y = 0$.
- (0, 20) que es intersección de las rectas $x = 0$, $2x + 4y = 80$.

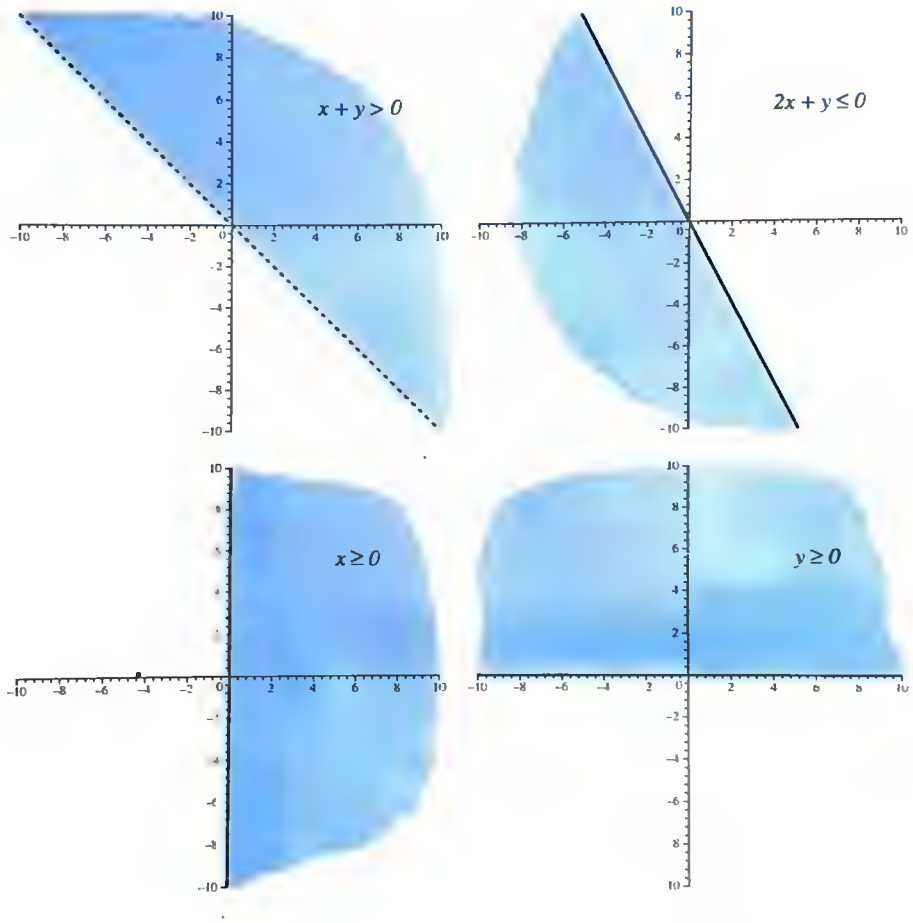
- (24, 0) que es intersección de las rectas $y = 0$, $5x + 2y = 120$.
- (20, 10) que es intersección de las rectas $2x + 4y = 80$, $5x + 2y = 120$.

Si representamos también las rectas de la forma $2x + 3y = k$, el máximo se alcanza en aquel vértice (o vértices) donde la recta tenga mayor k. Observamos que el máximo se va a alcanzar en (20,10), lo que quiere decir que para maximizar los beneficios se deberían arreglar 20 ordenadores con el problema A y 10 con el problema B. El beneficio es $60 \cdot 20 + 90 \cdot 10 = 2100$ € ⇒La única opción correctà es B.



4. El problema Max $F = 2x - 5y$ sujeto a las restricciones $x + y > 0$, $2x + y \leq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$: A) Tiene solución; B) El conjunto factible es el vacío; C) Tiene restricciones superfluas; D) Ninguna de las anteriores.

¿Gráfico de las regiones definidas por las restricciones?.



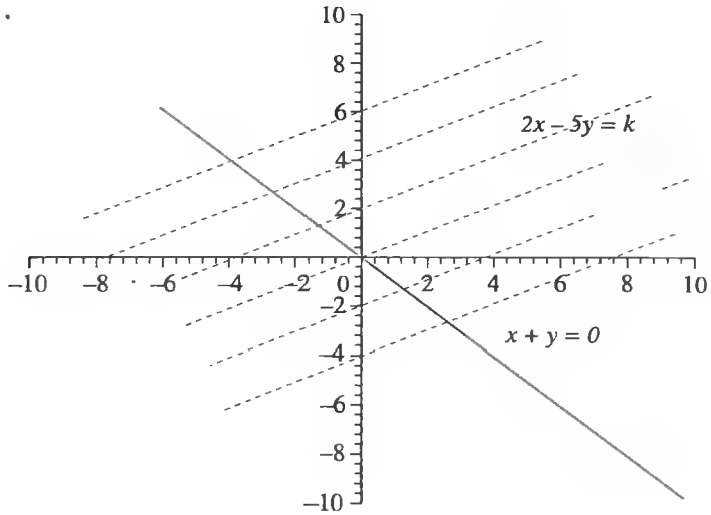
No hay puntos comunes a todas las regiones (la primera restricción es estricta y el punto (0, 0) está excluido) ⇒ La región factible es el conjunto vacío.

⇒ Es cierta la respuesta B, y, A falsa porque el problema no tiene solución.

Ninguna restricción sobra porque el conjunto factible varía si quitamos alguna de ellas ⇒ C es falsa.

5. El problema Max $F = 2x - 5y$ sujeto a las restricciones $x + y \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$: A) Tiene solución óptima; B) El conjunto factible es el vacío; C) Tiene restricciones superfluas; D) Ninguna de las anteriores.

Este caso es muy parecido al del ejercicio anterior, pero se ha eliminado la restricción $2x + y \leq 0$ y el punto (0, 0).



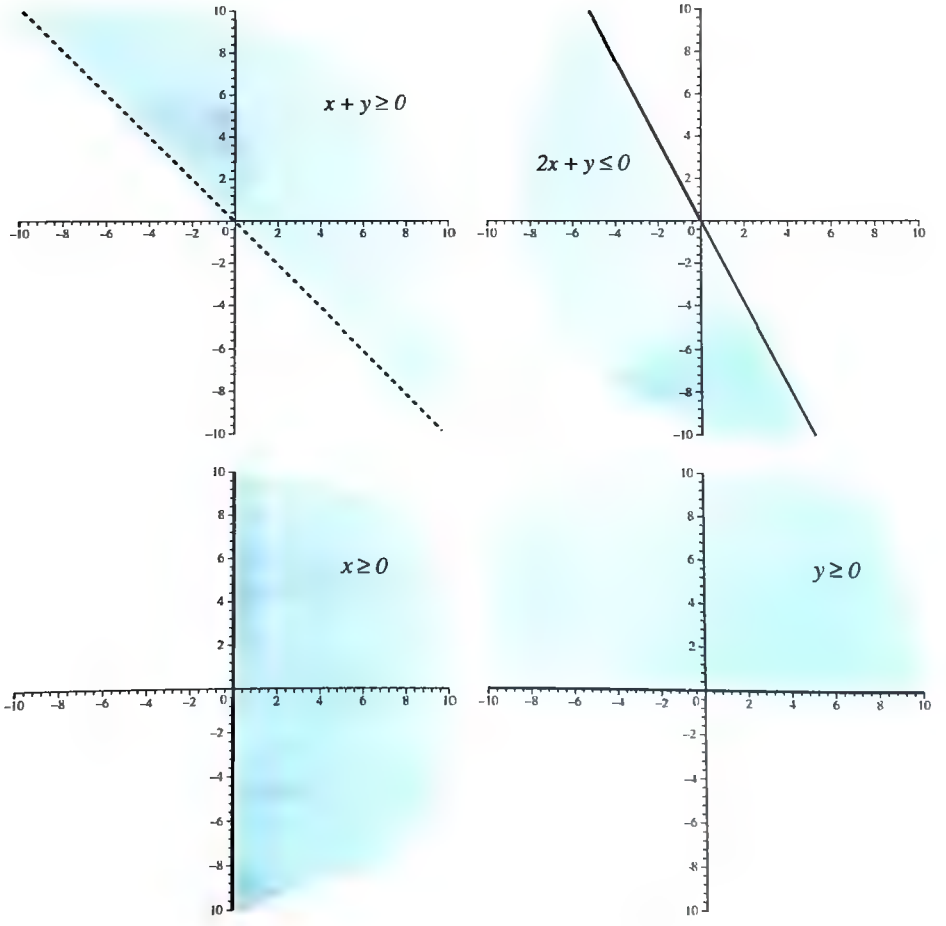
Observamos que la restricción $x + y \geq 0$ sobra (como se observa en la gráfica), es decir, no modifica la región definida por $x \geq 0$, $y \geq 0$, C es cierta.

$\Rightarrow$ La región factible resultante es el primer cuadrante, y B es falsa.

Si representamos gráficamente la región factible y las funciones $2x - 5y = k$, vemos que siempre hay puntos en el conjunto factible que hacen que k sea tan pequeño y también tan grande como queramos. Por esto, no se alcanza el mínimo de la función objetivo ni tampoco el máximo $\Rightarrow$ A es falsa.

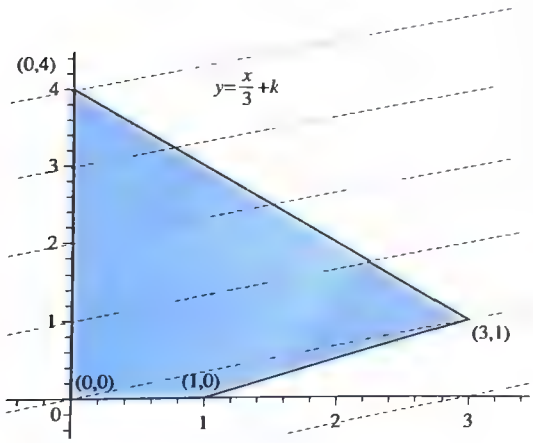
6. El problema de programación lineal Min $F = 2x + 3y$ sujeto a las restricciones $x + y \geq 0$, $2x + y \leq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$: A) La solución es 0, que se alcanza en (0, 0); B) Es un problema con restricciones superfluas; C) El conjunto factible es el vacío; D) Ninguna de las anteriores.

El conjunto factible está formado sólo por el punto (0, 0). En este punto tenemos que $F = 0$. Por tanto, la función objetivo, sujeta a las restricciones tiene su



mínimo y su máximo en (0, 0). A es cierta y C es falsa. Además, por ser las variables positivas, la primera restricción es redundante ⇒ La opción B cierta.

7. El valor óptimo de la función objetivo del siguiente problema de programación linea: Min $z = x - 3y$ sujeto a las restricciones $x + y \leq 4$, $x - 2y \leq 1$, $x, y \geq 0$ es: A) $z = 1$; B) $z = -12$; C) No existe, porque la región factible es no acotada; D) Ninguna de las anteriores.



Se trata de un problema en el plano, que podemos intentar resolver geométricamente. Representamos gráficamente la región factible, es decir, la región del plano delimitada por las restricciones del problema. Los vértices de esta región son los puntos (0, 0), (0, 4), (3, 1) y (1, 0) y observamos que esta región es convexa y acotada ⇒ La opción C no es cierta.

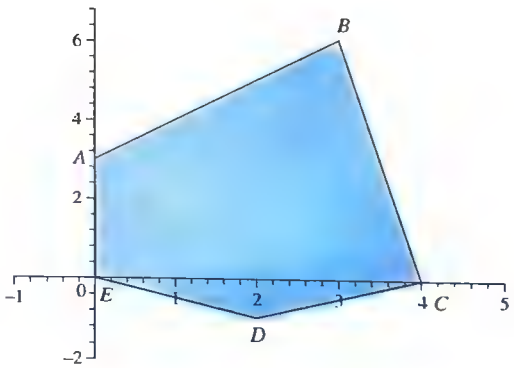
Además, el óptimo se va a alcanzar en uno de los vértices del conjunto. Para resolver el problema, bastará determinar los vértices y obtener el valor de la función en dichos puntos.

Como también hemos representado las rectas de la forma $y = \frac{x}{3} + k$, en la gráfica observamos que el menor y el mayor valor de k se van a alcanzar en los puntos (1, 0) y (0, 4). Para distinguir dónde se alcanza el máximo y el mínimo, calculamos

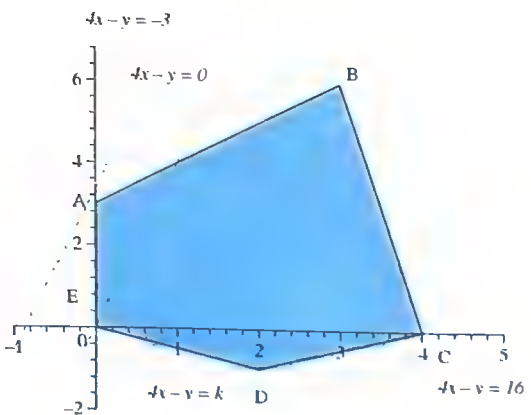
Vértice	Función objetivo
(1, 0)	$F(1, 0) = 1 - 3 \cdot 0 = 1$
(0, 4)	$F(0, 4) = 0 - 3 \cdot 4 = -12$

Entonces, el mínimo se alcanza en (0, 4) y es $z = -12$. La opción correcta es **B**.

8. El problema de programación lineal Min $z = 4x - y$, cuya región factible es la representada en la gráfica, verifica: A) Es un problema no acotado con óptimo; B) Es un problema con región factible no acotada sin óptimo; C) El mínimo se alcanza en A; D) Ninguna de las anteriores.



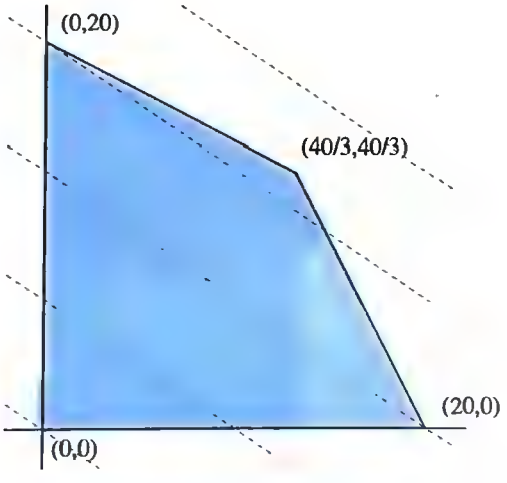
Como la región factible es acotada, las respuestas A y B son falsas. Si representamos la recta $y = 4x$, observamos que el mínimo se alcanzará en el punto A (será cuando k sea más grande) y el máximo en el punto C $\Rightarrow$ C también es cierta.



9. El problema "determinar el valor mínimo de la función $z = 20x_1 + 30x_2$ y los valores de (x_1, x_2) en que se obtiene dicho mínimo, sujeto a las restricciones: $x_1 + x_2 \leq k$, $5x_1 + 10x_2 \leq 200$, $4x_1 + 2x_2 \leq 80$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$, si $k = 40$" verifica: A) No tiene solución; B) Tiene una restricción superflua; C) Tiene infinitas soluciones; D) Ninguna de las anteriores.

Si se representan las desigualdades, como $k = 40$, la primera restricción $x_1 + x_2 \leq k$ se convierte en $x_1 + x_2 \leq 40$ y es superflua puesto que como las variables (x_1, x_2) son positivas entonces $x_1 + x_2 \leq 4x_1 + 2x_2 \leq 80 \Leftrightarrow x_1 + x_2 \leq 2x_1 + x_2 \leq 40$.

Por tanto, $x_1 + x_2 \leq k$ es superflua ya que no modifica el recinto definido por $5x_1 + 10x_2 \leq 200$, $4x_1 + 2x_2 \leq 80$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$ $\Rightarrow$La opción B es cierta.



¿Región factible?.

El polígono convexo de vértices (0, 0), (0, 20), (40/3), (40/3), (20, 0).

En dicha región, es evidente que la función objetivo $z = 20x_1 + 30x_2$ (representada en la gráfica para valores de z cada vez mayores) alcanza el mínimo en (0, 0) y vale 0.

$\Rightarrow$ Las opciones A y C son falsas.

10. En el problema de programación lineal: "Maximizar $f = 10x + 30y$, con las restricciones $-x + 2y \leq 100$, $-x + y \geq 0$, $y \geq 50$, $x \geq 0$, $y \geq 0$", se verifica: A) La región factible es acotada; B) La región factible contiene al (0, 0); C) Existen restricciones superfluas; D) No se alcanza el óptimo.

Al representar las restricciones vemos que, la región es acotada $\Rightarrow$ A es cierta. Además, existe una restricción $y \geq 0$ que es superflua ya que si $y \geq 50$ necesariamente $y \geq 0$, por tanto C es cierta.

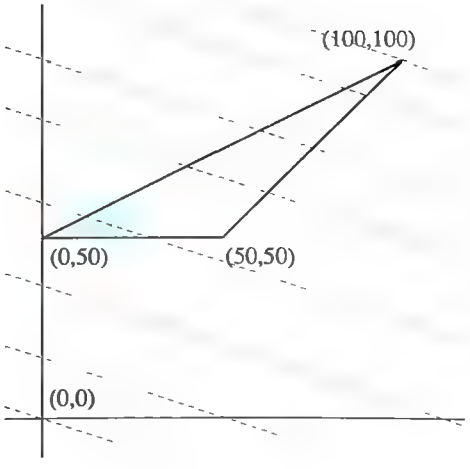
El punto (0, 0) no pertenece a la región factible porque $y \geq 50$, por consiguiente B es falsa.

Para comprobar si la opción D es cierta, se representa la región factible y la función objetivo $10x + 30y = k$ para valores de k cada vez mayores.

La región factible es el convexo acotado cuyos vértices son (0, 50), (100, 100), (50, 50), es claro que f alcanza el máximo en el vértice (100, 100), como se puede comprobar si se calculan los valores de f en cada vértice.

$$f(0, 50) = 1500, f(100, 100) = 4000, f(50, 50) = 2000.$$

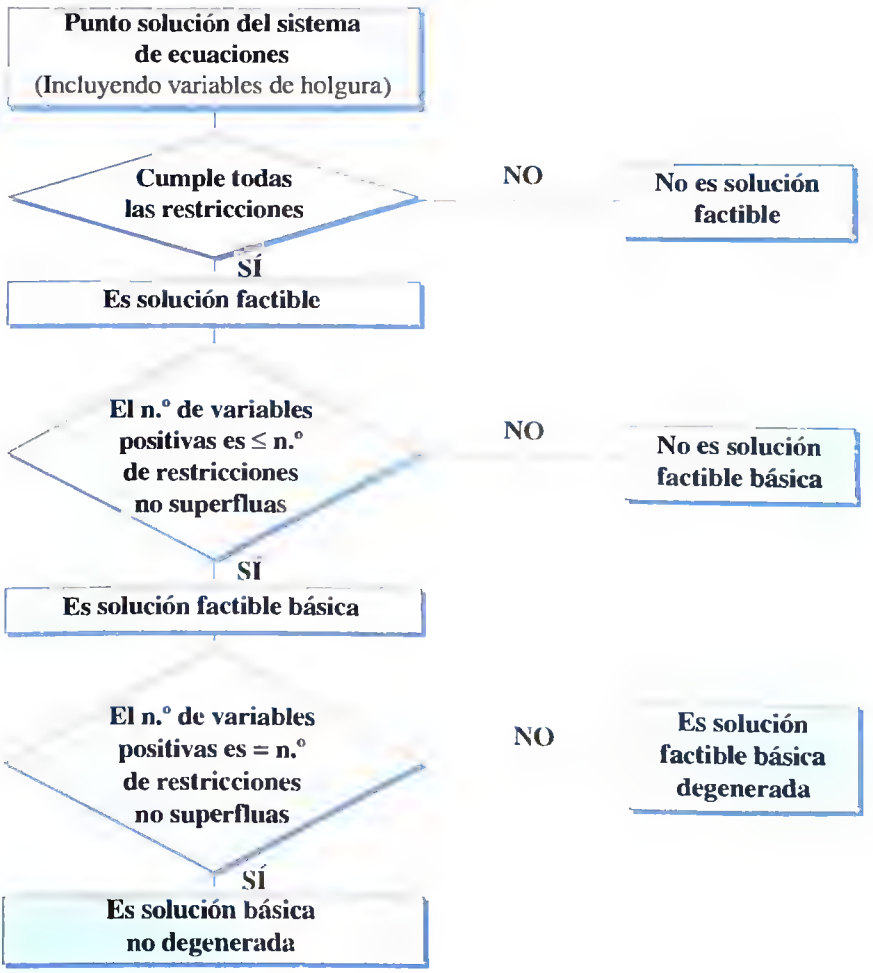
Es decir, el máximo es 4000 y se alcanza en el vértice (100, 100). Como consecuencia D es falsa.



Ejercicios relativos a:

"Expresión matricial del problema general en n variables y los tipos de soluciones."

TIPOS DE SOLUCIONES DE UN PROBLEMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL



1. En un problema de programación lineal las variables de holgura verifican: A) Son $\neq 0$; B) Son ≤ 0; C) Son ≥ 0; D) No tienen que verificar ninguna condición.

❖ Las variables de holgura se introducen para convertir las desigualdades en igualdades y poder escribir el problema en forma matricial.

Además, en cualquier problema de programación lineal las variables debían ser mayores o iguales que 0, y esta es una condición que es también válida para las variables de holgura $\Rightarrow$ C es correcta y B es falsa. Por otra parte, las variables de holgura pueden ser 0 $\Rightarrow$ A es incorrecta.

2. Dadas las restricciones, de un problema de programación lineal, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, $x_1 + x_2 \leq 3$, $2x_1 + x_2 - 3x_3 \leq 2$, el punto (1, 0, 0, 2, 0) es: A) Solución básica degenerada; B) Solución básica; C) Solución factible; D) Ninguna de las anteriores.

Si añadimos variables de holgura (x_4, x_5) a las restricciones resulta:

$x_1 + x_2 + x_4 = 3$, $2x_1 + x_2 - 3x_3 + x_5 = 2$ con $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$. Por tanto el punto (1, 0, 0, 2, 0) es solución factible porque verifica todas las restricciones. Además, es básica porque hay 2 restricciones y no más de 2 variables que son positivas. Y es no degenerada porque el número de variables positivas es exactamente 2 $\Rightarrow$ Son ciertas B y C.

3. Dadas las restricciones de un problema de programación lineal, $x_1 + x_2$ [illegible] $2x_1 + x_2 + 3x_3 \geq 2$, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$, el punto (0, 0, 1, 3, 1) es: A) Solución básica no degenerada; B) Solución básica; C) Solución factible; D) Ninguna de las anteriores.

Si añadimos variables de holgura a las restricciones del enunciado, resulta $x_1 + x_2 + x_4 = 3$, $2x_1 + x_2 + 3x_3 - x_5 = 2$, con $x_1, x_2\, x_3, x_4, x_5 \geq 0$. Por tanto, el punto (0, 0, 1, 3, 1) es solución factible y C es cierta. Tiene 3 coordenadas positivas distintas de 0. Como el número de restricciones es 2, no puede ser solución básica, ni solución básica degenerada, luego A y B son falsas.

4. Dado un problema de programación lineal cuyas restricciones son $x_1 + x_2 \leq 4$, $x_2 - 2x_1 \geq 2$, $x_1, x_2 \geq 0$, una solución básica no degenerada es: A) (0, 1, 4, –1); B) (1, 1, 5, –3); C) (0, 4, 0, 2); D) Ninguna de las anteriores.

Si introducimos las variables de holgura x_3 y x_4, resulta:

$$x_1 + x_2 + x_3 = 4, -2x_1 + x_2 - x_4 = 2 \text{ con } x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0.$$

Las soluciones básicas no degeneradas tienen sólo dos coordenadas positivas distintas de 0 (el número de restricciones es 2).

Todos los puntos del sistema, sin considerar las que tienen coordenadas negativas, son soluciones, las dos primeras opciones, (0, 1, 4, –1) y (1, 1, 5, –3), no son factibles (una coordenada es negativa), por lo que tampoco son básicas.

La respuesta C, (0, 4, 0, 2) sí es correcta porque es solución factible, básica (no tiene más de 2 coordenadas positivas) y es no degenerada (tiene exactamente 2).

5. Dado el siguiente problema de programación lineal: "Calcular el max $z = 5x_1 + 2x_2$ con las restricciones: $3x_1 + 5x_2 \leq 15$, $10x_1 + 4x_2 \leq 20$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$". Convertimos las desigualdades en igualdades mediante las variables de holgura x_3 y x_4 y escribimos el problema en forma matricial. Se pide elegir las afirmaciones correctas de entre las siguientes: A) El vector de costes es (5, 2); B) El vector de costes es (5, 2, 0, 0); C) No podemos determinar el vector de costes sin más datos; D) Ninguna de las anteriores.

❖ El vector de costes es una matriz fila cuyos términos son los coeficientes de las variables en la función objetivo o de costes.

Como hay dos restricciones, se añaden dos variables de holgura, x_3 y x_4, antes de escribir el problema en forma matricial. La función objetivo resultante es $5x_1 + 2x_2 + 0x_3 + 0x_4$ y el vector de costes es (5, 2, 0, 0) $\Rightarrow$ B es correcta.

6. En el problema anterior: A) La primera columna de la matriz de las restricciones corresponde a la primera restricción; B) La primera fila de la matriz de las restricciones corresponde a la primera restricción; C) La matriz de las restricciones tiene 2 columnas y 4 filas; D) Ninguna de las anteriores.

¿Expresión matricial del problema?.

Para expresar el problema en forma matricial hay que introducir las variables de holgura x_3 y x_4.

Las restricciones iniciales se transforman en $3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15$, $10x_1 + 4x_2 + x_4 = 20$, con $x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$. Entonces, podemos escribir en forma matricial las restricciones y la función objetivo como

$$\begin{cases} \text{Max}\begin{pmatrix}5 & 2 & 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} \\ \begin{pmatrix}3 & 5 & 1 & 0\\10 & 4 & 0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\\x_4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}15\\20\end{pmatrix} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \text{Max } \bar{c}\cdot\bar{x} \\ A\bar{x} = \bar{b} \end{cases}$$

Vemos que la primera fila de A corresponde a la primera restricción $\Rightarrow$ A es falsa y B cierta. Además, A tiene 2 filas y 4 columnas (es de dimensión $m \times (n + m)$, si n es el número de variables iniciales y m el de restricciones) y C no es cierta.

Ejercicios relativos a:

"Conjuntos convexos."

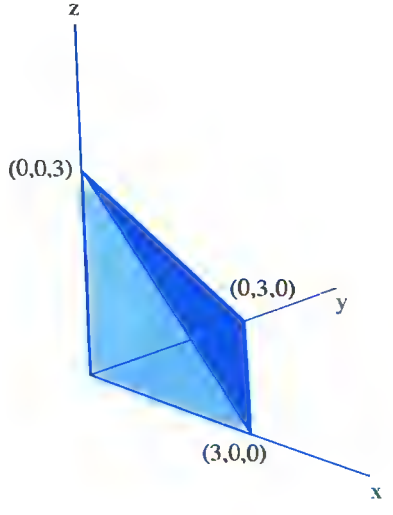
1. De entre los siguientes conjuntos puede ser conjunto factible de un problema de programación lineal: A) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 3,\ x, y, z \geq 0\}$; B) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 0, x + y = 2, x, y, z \geq 0\}$; C) $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2,\ y = 3, x \geq 0\}$; D) Ninguno de los anteriores.

Un conjunto factible debe ser convexo. Este tipo de problemas se puede resolver de dos formas. Gráficamente, cuando el número de variables es menor o igual a 3, y analíticamente.

El primer conjunto

$\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 3, x, y, z \geq 0\}$

es un tetraedro y por tanto un conjunto convexo. Es la intersección de un semiespacio con un cuadrante, véase figura.



El segundo conjunto también es convexo por ser la intersección de dos convexos (planos) y por tanto ambos puede ser conjuntos factibles para ciertos problemas lineales (los conjuntos definidos por restricciones deben ser convexos).

El conjunto $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 2,\ y = 3,\ x \geq 0\}$ también es convexo ya que es una semirrecta. Por tanto A, B y C son ciertas.

❖ Otra forma de probar si un conjunto es convexo es, comprobar que si dos puntos cualesquiera que están en el conjunto, entonces el segmento que los une también está, es decir, todas las combinaciones convexas de los dos puntos pertenecen al conjunto.

Veamos que el conjunto del apartado A, $\{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x + y + z \leq 3, x, y, z \geq 0\}$ es convexo: Sean (x, y, z), $(x', y', z') \in A$ dos puntos cualesquiera, es decir, $x + y + z \leq 3, x, y, z \geq 0$ y $x' + y' + z' \leq 3, x', y', z' \geq 0$.

Sea $\lambda \in [0, 1]$ tenemos que comprobar que $\lambda(x, y, z) + (1 - \lambda)(x', y', z') \in A$ o lo que es equivalente $(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda y + (1-\lambda)y', \lambda z + (1-\lambda)z') \in A$. En efecto, como $\lambda x + (1-\lambda)x' \geq 0, \lambda y + (1-\lambda)y' \geq 0, \lambda z + (1-\lambda)z' \geq 0$ falta probar $\lambda x + (1-\lambda)x' + \lambda y + (1-\lambda)y' + \lambda z + (1-\lambda)z' \leq 3$,

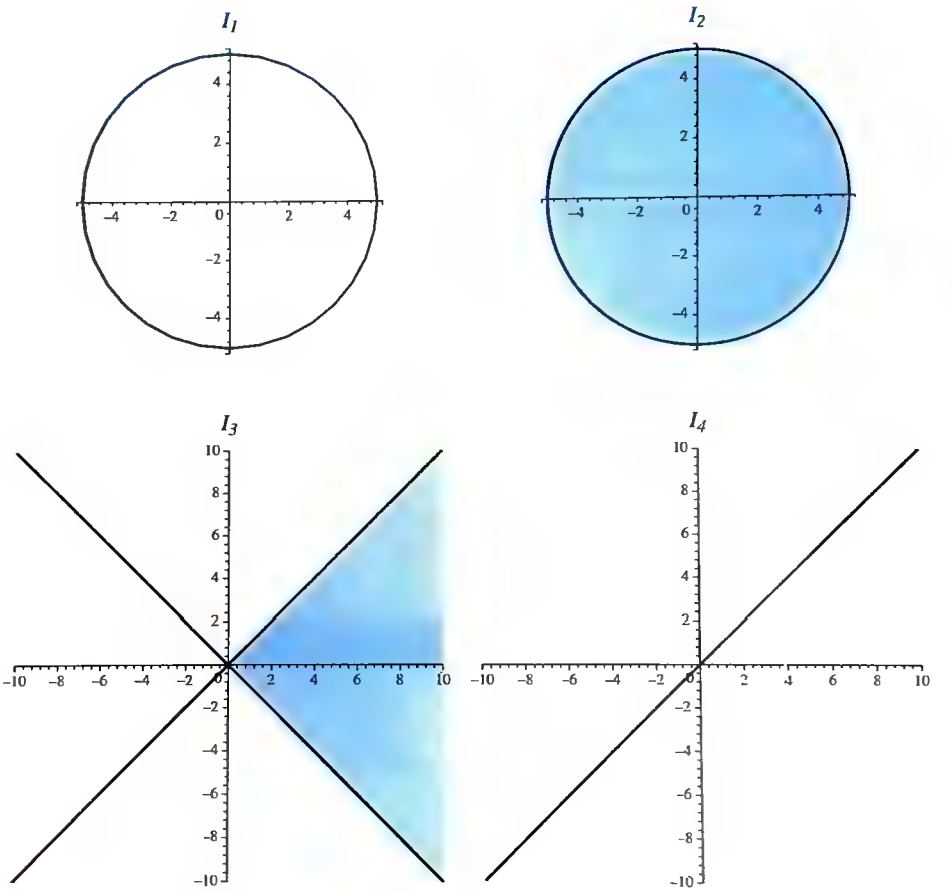
$$\lambda x + (1-\lambda)x' + \lambda y + (1-\lambda)y' + \lambda z + (1-\lambda)z' =$$
$$= \lambda(x + y + z) + (1-\lambda)(x' + y' + z') \leq \lambda 3 + (1-\lambda)3 = 3$$

Para el conjunto de B. Sean (x, y, z), $(x', y', z') \in B$ dos puntos cualesquiera, es decir, $z = 0, x + y = 2, x, y, z \geq 0$ y $z' = 0, x' + y' = 2, x', y', z' \geq 0$. Sea $\lambda \in [0, 1]$ y veamos que $(\lambda x + (1-\lambda)x', \lambda y + (1-\lambda)y', \lambda z + (1-\lambda)z') \in B$. Es obvio que $\lambda z + (1 - \lambda) z' = 0$ y que el resto de coordenadas son positivas. Además por ser $x + y = 2$ y $x' + y' = 2$ se tiene que $\lambda x + (1 - \lambda) x' + \lambda y + (1 - \lambda) y' = 2$.

Para el conjunto C se razona de manera análoga.

2. Considerados los conjuntos: $I_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 = 25\}$, $I_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25\}$, $I_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x + y \geq 0, x - y \geq 0\}$, I_4 $\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x = y\}$. Elíjanse las afirmaciones ciertas de entre las siguientes: A) I_1 e I_4 son conjuntos convexos; B) I_2 e I_3 son conjuntos convexos: C) I_3 e I_4 son conjuntos convexos; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Dibujaremos los conjuntos y veremos gráficamente si cualquier segmento de extremos dos puntos cualesquiera del conjunto está dentro del conjunto, que es la definición de conjunto convexo.



Vemos que I_1 es una circunferencia, I_2 es un círculo, I_3 es una región del plano e I_4 es una recta. Se observa que I_1 no es convexo, porque al unir dos puntos cualesquiera de la circunferencia nos da una cuerda, que no está contenida en la circunferencia. El círculo sí es un conjunto convexo y también lo es la región sombreada que define I_3. El conjunto I_4, es la bisectriz del primer cuadrante que también es un conjunto convexo $\Rightarrow$ B y C son ciertas.

3. Es cierto que, en la recta real $\mathbb{R}$: A) Los únicos conjuntos convexos, además de el conjunto vacío, son los intervalos; B) Los únicos conjuntos convexos, además del conjunto vacío, son los intervalos de la forma $[a, b]$, $a, b \in \mathbb{R}$; C) Si $x \in \mathbb{R}$, x es convexo; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Por la propia definición de conjunto convexo, dados dos elementos cualesquiera, el segmento que los une debe pertenecer al conjunto $\Rightarrow$ A es cierta.

Por tanto en $\mathbb{R}$, dados dos elementos de $\mathbb{R}$, es decir, dos números reales, el segmento que los une (es decir, el intervalo del que son extremos) debe estar en el conjunto. Consecuentemente, los únicos conjuntos convexos además del conjunto vacío, son los conjuntos de la forma, (a, b), [a, b), (a, b], [a, b], para $a, b \in \mathbb{R}$, y también los intervalos no acotados, es decir, con extremos $+\infty$ o $-\infty$. Luego B es falsa. C es cierta porque un punto siempre es convexo.

Observación: un punto es un intervalo cerrado cuyos extremos coinciden.

4. Es cierto que si $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ son conjuntos convexos: A) Siempre el conjunto $A \cap B$ (no vacío) es convexo; B) El conjunto $A \cup B$ es convexo; C) Si $A \subseteq B$ entonces $A \cup B$ es convexo siempre; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Si dos conjuntos son convexos entonces, el conjunto intersección también lo es.

En efecto, si $A, B \subseteq \mathbb{R}^n$ son conjuntos convexos como el conjunto intersección es $A \cap B = \{x : x \in A, x \in B\}$, es claro que, si dos puntos pertenecen a la intersección también pertenece a ella cualquier combinación convexa de ellos dos, por ser cada conjunto convexo $\Rightarrow$ A es cierta.

La opción B es falsa ya que ya si consideramos en $\mathbb{R}^2$ los conjuntos $A = \{(x, y) : x + y = 0\}$, bisectriz del segundo y cuarto cuadrante, e $B = \{(x, y) : x - y = 0\}$, bisectriz del primer y tercer cuadrante, ambos son convexos pero la unión $A \cup B$ no lo es.

Sin embargo C es cierta porque si $A \subseteq B$ entonces $A \cup B = B$ que es convexo por hipótesis.

5. Sea un conjunto $A \subseteq \mathbb{R}^n$ entonces se verifica que: A) Si para todo $\lambda \geq 0$ y cada $a \in A$ se tiene que $\lambda a \in A$ entonces A es convexo; B) Si dados $a, b \in A$ fijos se verifica que $a + b \in A$ entonces A es convexo; C) Si se verifican las condiciones de los apartados A y B entonces A es convexo; D) Ninguna de las anteriores.

La condición que cumple el conjunto del apartado A no es suficiente para ser conjunto convexo. Para comprobar lo anterior, basta considerar un conjunto que cumpla la condición y no sea convexo. Consideramos el conjunto A de $\mathbb{R}^2$ formado por los ejes coordenados ($x = 0$, $y = 0$) entonces este conjunto verifica la condición para todo $\lambda \geq 0$ y cada $a \in A$ se tiene que $\lambda a \in A$ pero el conjunto no es convexo.

La opción B es falsa porque el conjunto $\{a, b, a + b\}$ verifica la condición dada pero no es convexo porque $\lambda a + (1 - \lambda)b \notin \{a, b, a + b\}$ para todo $\lambda \in [0, 1]$.

Pero la opción C es cierta, es decir, A cumple

i) Para todo $\lambda \geq 0$ y cada $a \in A$ se tiene que $\lambda a \in A$
ii) Dados $a, b \in A$ cualesquiera se verifica que $a + b \in A$

entonces A es convexo. En efecto, la opción i) es equivalente a que $\lambda A = \{\lambda a | a \in A\} \subseteq A$ y la opción ii) es equivalente a $A + A = \{a + a' | a, a' \in A\} \subseteq A$. Por lo tanto, es fácil comprobar que si $a, b \in A$ entonces

$$\lambda a + (1 - \lambda)b \in A$$

ya que por i) λa y $(1 - \lambda)\, b$ pertenecen a A y por la opción ii) $\lambda a + (1 - \lambda)b \in A$.

6. Sean E, V, dos espacios vectoriales y $f : E \to V$ una aplicación lineal. Si A, $B \subseteq E$ son dos conjuntos convexos, entonces no es un conjunto convexo: A) $f(A)$; B) Nuc f; C) $f(A) \cap f(B)$; D) Todos los conjuntos anteriores son convexos.

❖ Por ser f una aplicación lineal, transforma convexos a convexos.

En efecto, si $\overline{u}, \overline{v} \in A$ entonces, $\lambda\overline{v} + (1 - \lambda)\overline{u} \in A$. Sea $f(\overline{u}), f(\overline{v}) \in f(A)$ entonces $\lambda f(\overline{v}) + (1 - \lambda) f(\overline{u}) \in f(A)$ ya que por ser f lineal se tiene:

$$f\left(\lambda\overline{v}+(1-\lambda)\overline{u}\right)=\lambda f(\overline{v})+(1-\lambda)f(\overline{u})$$

y por ser A convexo $\lambda\overline{v}+(1-\lambda)\overline{u}\in A$. Luego

$$\lambda f(\overline{v})+(1-\lambda)f(\overline{u})\in f(A).$$

Es decir, $f(A)$ es un conjunto convexo y A es falsa.

Además, $f(A)\cap f(B)$ es convexo porque es intersección de conjuntos convexos $\Rightarrow$ C es falsa.

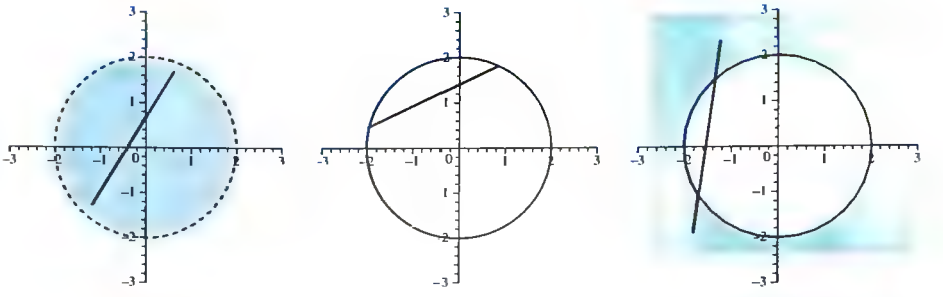
$\text{Nuc}\, f=\{\overline{v}\in A: f(\overline{v})=\overline{0}\}$ también es convexo porque si $\overline{v},\overline{u}\in \text{Nuc}\, f$, entonces

$$f\left(\lambda\overline{v}+(1-\lambda)\overline{u}\right)=\lambda f(\overline{v})+(1-\lambda)f(\overline{u})=\lambda\overline{0}+(1-\lambda)\overline{0}=\overline{0}.$$

Como los conjuntos de todas las opciones son convexos D es cierta.

7. De los siguientes conjuntos, son convexos: A) $\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\sqrt{x_1^2+x_2^2}<2\right\}$; B) $\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\sqrt{x_1^2+x_2^2}=2\right\}$; C) $\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\sqrt{x_1^2+x_2^2}>2\right\}$; D) Todos los conjuntos anteriores.

El único conjunto convexo es A porque es un círculo salvo su circunferencia (ver Figura, a). El conjunto $\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\sqrt{x_1^2+x_2^2}=2\right\}$ es una circunferencia y obviamente no es convexo porque el segmento que une dos puntos es una cuerda y por tanto no pertenece al conjunto (ver Figura, b). Por otro lado, el conjunto $\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\sqrt{x_1^2+x_2^2}>2\right\}$ es el complementario de un círculo y aunque (0, 3) y (0, –3) pertenecen al conjunto existen puntos de la combinación convexa de (0, 3) y (0, –3) que no pertenece a $\left\{(x_1,x_2)\in\mathbb{R}^2:\sqrt{x_1^2+x_2^2}>2\right\}$, por ejemplo el punto (0, 0) (ver Figura, c).



a *b* *c*

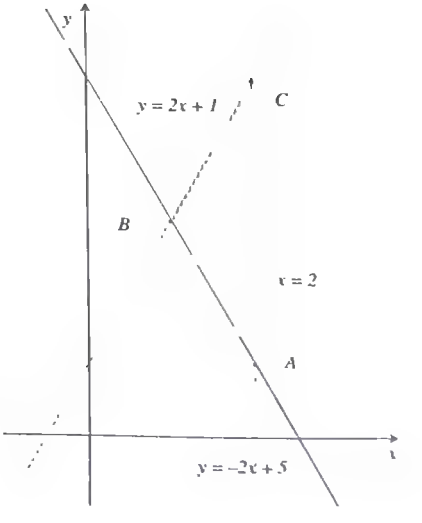
8. El triángulo ABC de vértices A (2, 1), B (1, 3) y C (2, 5), es un conjunto convexo. Las ecuaciones del conjunto de semiplanos que lo definen son: A) $y \leq 2x + 1$; $x \leq 2$; $y \leq -x + 5$; B) $y \leq 2x + 1$; $x \geq 2$; $y \leq -x + 5$; C) $y \leq 2x - 1$; $x - 2 \leq 0$; $y \geq -2x + 5$; D) Ninguna de las anteriores.

La forma de resolver este problema es determinar la recta que pasa por dos vértices cualesquiera y determinar en qué semiplano está el otro vértice. Si este proceso se repite para todos los vértices elegidos de 2 en 2, tenemos las ecuaciones pedidas.

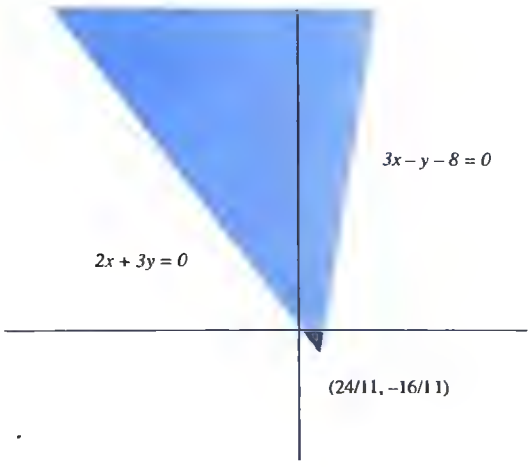
La recta que pasa por A y B es $y = -2x + 5$ y el punto C queda en el semiplano $y \geq -2x + 5$.

Por B y C pasa la recta $y = 2x + 1$ y el punto A pertenece a $y \leq 2x + 1$.

Y por los puntos C y A pasa la recta $x = 2$, quedando el vértice B en el semiplano $x \leq 2$. Por lo tanto, las desigualdades que definen el conjunto son: $y \geq -2x + 5$, $y \leq 2x + 1$, $x \leq 2 \Rightarrow$ D es cierta.



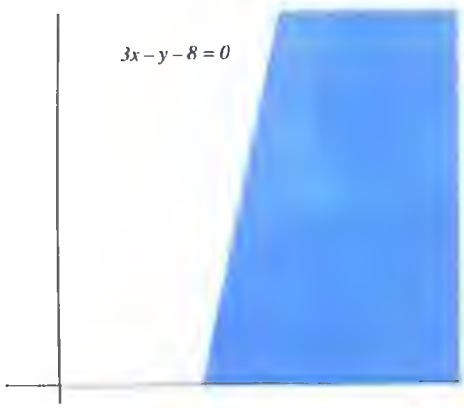
9. El número de vértices que tiene la región convexa de $\mathbb{R}^2$ definida por las restricciones $2x + 3y \geq 0$, $3x - y - 8 \leq 0$, es: A) 1; B) 2; C) Ninguno.



Si representamos la región que determinan las dos restricciones se observa que las rectas $2x + 3y = 0$ y $3x - y - 8 = 0$ se cortan en el punto (24/11, –16/11), (basta resolver el sistema que aparece) el cual es el vértice de la región convexa dada.

$\Rightarrow$ Es cierta la opción A.

10. Si $k < 0$ es un número real, la región convexa definida por las restricciones $2x + 3y - k \geq 0$, $3x - y - 8 \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, verifica: A) Tiene un único vértice; B) Tiene tres vértices; C) Es una región vacía; D) Ninguna de las anteriores.



Se representan las restricciones $3x - y - 8 \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$.

Para $k < 0$ la restricción $2x + 3y - k \geq 0$ es superflua, ya que las rectas $2x + 3y - k = 0$, son de la forma: $2x + 3y = -1$, $2x + 3y = -3$, $2x + 3y = -8$ ... y, por tanto, las ordenadas en el origen es negativa quedan representadas en los cuadrantes II, III y IV. La región definida es la que aparece en

la gráfica y la restricción $2x + 3y - k \geq 0$ es superflua ya que no modifica la región definida por $3x - y - 8 \geq 0, x \geq 0, y \geq 0$.
$\Rightarrow$ Es cierta A y el vértice es el corte de la recta $3x - y - 8 \geq 0$ con el eje de abscisas, es decir, el punto (8/3, 0).

11. Si k es un número real, entonces la región convexa definida por las restricciones $kx + y \geq 0$, $2x + y \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ verifica: A) Siempre tiene un único vértice; B) Para $k < 0$, es una región vacía; C) Para $k \geq 0$ la restricción $kx + y \geq 0$ es superflua; D) Todas las anteriores son falsas.

Es fácil comprobar que la región definida por las restricciones $x \geq 0$, $y \geq 0$, primer cuadrante, coincide con la definida por las restricciones $2x + y \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, por tanto, la restricción $2x + y \geq 0$ es superflua.

Para $k \geq 0$, la recta $kx + y = 0$, es decreciente y varía en los cuadrantes II y IV. Además, el primer cuadrante, $x \geq 0$, $y \geq 0$, está enteramente contenido en el semiplano $kx + y \geq 0$ y por tanto C es cierta.

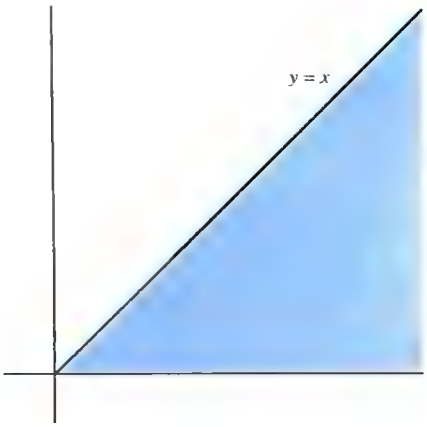
La opción B es falsa, ya que para $k < 0$ la recta $kx + y = 0$ es creciente y varía en los cuadrantes I y III, luego la restricción $kx + y \geq 0$ no es superflua y la región considerada no es vacía.

A es cierta, ya que, aunque la región varía con cada valor de k, siempre tiene como único vértice (0, 0).

12. Si a y b son dos números reales mayores que 0, entonces la región convexa definida por las restricciones $ax + by \geq 0$, $x - y \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ verifica: A) Siempre tiene un vértice; B) Es un segmento para $a = b$; C) Es no acotada; D) Ninguna de las anteriores.

Sin tener en cuenta la restricción $ax + by \geq 0$, la región definida por $x - y \geq 0, x \geq 0, y \geq 0$ es la de la figura.

Como por hipótesis $b > 0$, la restricción $ax + by \geq 0$, es equivalente a $\frac{a}{b}x + y \geq 0$.



Por otro lado, a y b son dos números reales mayores que 0 luego, las rectas de la forma $\frac{a}{b}x+y=0$ son decrecientes y varían en los cuadrantes II y IV. Además los semiplanos de la forma $\frac{a}{b}x+y\geq 0$ siempre contienen a la región definida por el resto de restricciones, es decir, la región de la figura.

Las opciones A y C son ciertas porque $ax+by\geq 0$ (es superflua) no modifica la región definida por $x-y\geq 0$, $x\geq 0$ $y\geq 0$ y la región no está acotada.

B es falsa ya que para $a=b$, la restricción $ax+by\geq 0$ es superflua y la región que determina no es un segmento sino la región de la figura anterior.

13. El conjunto factible de un programa de programación lineal debe ser un conjunto: A) Convexo; B) Acotado; C) Convexo y Acotado; D) Puede estar definido por más restricciones de las necesarias.

❖ El conjunto factible siempre es un conjunto convexo ⇒ A es cierta.

❖ El conjunto factible no es necesariamente acotado. Pero si es acotado podemo siempre determinar el óptimo, tal como enuncia el Teorema Fundamental de la Programación Lineal ⇒ B y C son falsas.

❖ Algunas de las restricciones que delimitan el conjunto factible puede ser redundantes ⇒ La opción D es correcta.

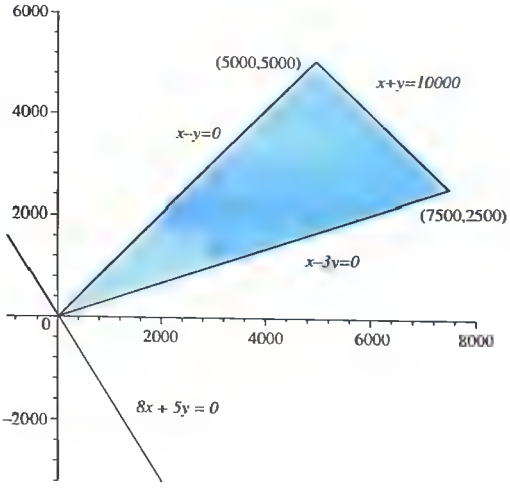
Ejercicios relativos a:

"Teorema Fundamental de la Programación Lineal."

1. La cantidad óptima a invertir en cada fondo del ejercicio 1 del cap. 8-1 es: A) $x = 5000$; B) $x = 2500$, $y = 7500$; C) $x = 7500$, $y = 2500$; D) Ninguna de las anteriores.

El problema, tal como se vio en el ejercicio 1 es

$$\text{Max } F = 8x + 5y$$
$$x - 3y \leq 0$$
$$x - y \geq 0$$
$$x + y \leq 10000$$
$$x,\ y \geq 0$$



Vamos a resolverlo determinando los vértices de la región factible y aplicando el Teorema Fundamental de la Programación Lineal.

❖ Toda función lineal F definida sobre un conjunto poligonal convexo C y acotado toma sus valores máximo y mínimo sobre los vértices de dicho conjunto.

Como se aprecia en la gráfica de la región factible, sus vértices son (0, 0), (5000, 5000) y (7500, 2500). En estos puntos, la función objetivo vale respectivamente 0, 65000 y 72500. Y para obtener el máximo beneficio con los fondos de inversión tenemos que invertir 7500 € en el fondo A y 2500 en B. El beneficio que obtenemos es 725 €. La solución correcta es C.

❖ Este problema lo podíamos haber resuelto aplicando el método gráfico. En la figura se ve que la solución obtenida es la solución óptima.

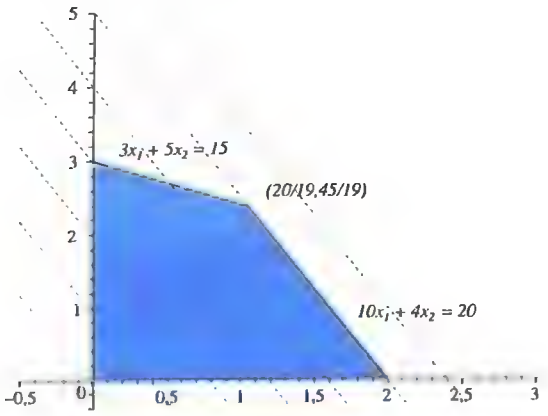
2. Con los mismos datos que en el ejercicio 5 del cap. 8-3, se verifica: A) (2, 0, 0, 0) es una solución factible básica; B) (3, 1, 2, 0) es una solución factible básica; C) Cualquier punto que pertenezca al segmento $\left[\left(\frac{20}{19},\frac{45}{19}\right),(2,0)\right]$, es solución óptima; D) Ninguna de las anteriores.

El ejercicio queda planteado como

$$\text{Max } F = 5x_1 + 2x_2$$
$$3x_1 + 5x_2 + x_3 = 15$$
$$10x_1 + 4x_2 + x_4 = 20$$
$$x_1, x_2, x_3, x_4 \geq 0$$

Como tenemos dos restricciones y (3, 1, 2, 0) tiene tres componentes positivas, no puede ser solución básica, además ni siquiera es factible. (2, 0, 0, 0) tiene menos de dos componentes positivas, pero no verifica la primera restricción y, por lo tanto, no es solución factible.

Para determinar si cualquier punto del segmento [(20/19, 45/19), (2, 0)] es solución óptima, podemos resolver el problema geométricamente. En la figura se han representado la región factible, las restricciones y el vértice (20/19, 45/19). La función objetivo está representada por las rectas punteadas. Observamos que el óptimo se va a alcanzar en los puntos del segmento [(20/19, 45/19), (2, 0)]. La respuesta C es correcta.



3. El problema Min $F = 2x + 3y$ sujeto a las restricciones $x + y \geq 0$, $2x + y \leq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$: A) No tiene ninguna solución; B) Tiene restricciones superfluas; C) El conjunto factible es el vacío; D) Ninguna de las anteriores.

El conjunto factible está formado sólo por el punto (0, 0). Por tanto, la función objetivo alcanza su mínimo en (0, 0). A y C son falsas. Además, por ser las variables positivas, la primera restricción es superflua $\Rightarrow$ B es cierta.

4. El problema Max $F = 2x - 5y$ sujeto a las restricciones $x + y > 0$, $4x + 2y \leq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$: A) Tiene solución; B) El conjunto factible es el vacío; C) Tiene restricciones superfluas; D) Ninguna de las anteriores.

En este caso el conjunto factible es el vacío y B es cierta.

Entonces, por no tener puntos el conjunto factible el problema no tiene solución, la opción A es falsa.

Ninguna restricción es redundante porque el conjunto factible varía si quitamos alguna de ellas luego C es falsa.

5. Si el mínimo de la función objetivo se alcanza en los puntos P_1 y P_2, entonces también se alcanza: A) En cualquier combinación lineal de P_1 y P_2; B) En cualquier combinación lineal convexa de P_1 y P_2; C) En cualquier vértice; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Si el óptimo se alcanza en dos puntos, también lo hace en cualquier combinación lineal convexa de ellos, como es un segmento $\Rightarrow$ B es cierta.

La opción A es falsa, el teorema fundamental de programación lineal no asegura que se alcance en cualquier combinación lineal (sólo en las convexas), porque si ésta no es convexa, los puntos pueden no estar en la región factible.

Así mismo, que el mínimo de la función objetivo se alcance en dos puntos no significa que se deba alcanzar en todos los vértices; esto sólo ocurriría si los vértices se pudieran expresar como combinación lineal convexa de ellos: C es falsa.

6. En un problema de programación lineal: A) La función objetivo siempre alcanza el valor óptimo; B) Aunque el convexo factible sea de área infinita, el óptimo de la función objetivo puede ser finito; C) Aunque el convexo sea de área finita, el problema puede tener infinitas soluciones; D) Ninguna de las anteriores.

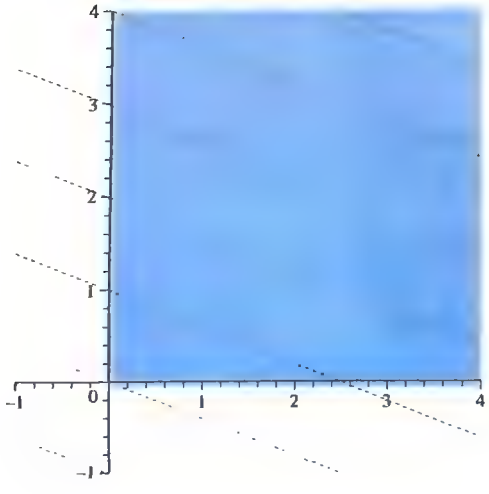
A es falsa, la Teoría de Optimización estudia los casos en los que la función objetivo alcanza el valor óptimo y en los que este se puede determinar, como ejemplo, el ejercicio 4 de cap. 8-2 no tiene solución.

B es cierta. Por ejemplo, si consideramos el primer cuadrante como región factible la función objetivo $F = x + y$ alcanza el mínimo en el origen.

C es cierta, porque si el óptimo se alcanza en dos vértices P_1 y P_2 también se alcanza en cualquier combinación convexa de ellos, luego se alcanza en infinitos puntos.

7. El problema Min $F = 2x + 5y$ sujeto a las restricciones $x + y \geq 0$, $x \geq 0$, $y \geq 0$: A) Tiene una única solución óptima; B) Tiene infinitas soluciones óptimas; C) No tiene solución; D) Ninguna de las anteriores.

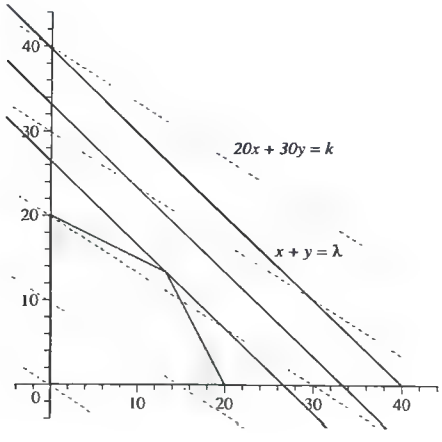
La región factible es parecida a la del ejercicio 4 de cap. 8-2: es el primer cuadrante, que es de área infinita. Sin embargo, la función objetivo es distinta y se pide determinar el mínimo. Para encontrar la respuesta correcta, vamos a resolver geométricamente el problema. En la figura se ha representado la región factible y rectas de la forma $2x + 5y = k$ para k un número real. Se observa que un valor extremo, o mínimo en este caso, se va a alcanzar en (0, 0). Como la función en este punto vale 0, y este es el mínimo valor que puede alcanzar (porque $x \geq 0$, $y \geq 0$), entonces (0, 0) es la solución buscada.



La única respuesta correcta es A.

8. En el problema: "Calcular el mínimo de la función $z = 20x + 30y$ sujeto las restricciones: $x + y \leq \lambda$, $5x + 10y \leq 200$, $4x + 2y \leq 80$, $x, y \geq 0$", si $\lambda \in [80/3, +\infty)$, el valor mínimo: A) Es 2; B) No se alcanza; C) Es 0; D) Ninguna de las anteriores.

Representamos la región factible para $\lambda \geq 80/3$ (las rectas $x + y = \lambda$ se representan en línea continua).



Observamos que si $\lambda \geq 80/3$ la primera restricción se convierte en restricción superflua, puesto que no modifica el recinto definido por las otras restricciones.

La región factible es el polígono convexo de vértices (0, 0), (0, 20) (40/3, 40/3) (20, 0).

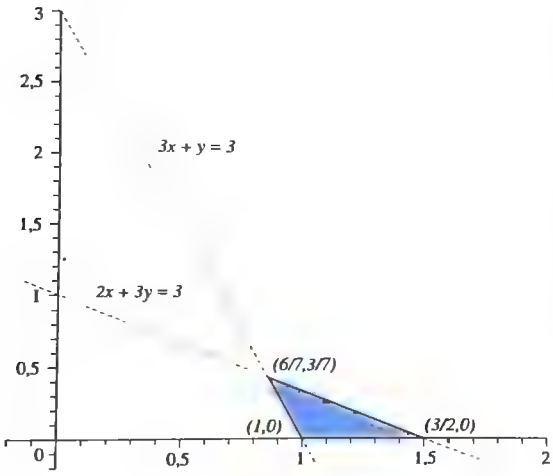
En dicha región, es evidente que, z alcanza el mínimo en (0, 0) y vale 0. (Se puede comprobar en la representación gráfica de la función objetivo, en línea discontinua).

9. En un problema de programación lineal el conjunto de soluciones: A) No puede ser vacío; B) Puede estar definido por más condiciones de las necesarias; C) No siempre está acotado; D) Ninguna de las anteriores.

A no es correcta. Por ejemplo, en el problema: Max $F = 5x + 2y$, sujeto a $-3x + y \leq 2$, $x, y \geq 0$, el conjunto factible no está acotado y la función objetivo no alcanza su máximo, por tanto el conjunto de soluciones es el vacío. O bien si el conjunto factible es el vacío también el conjunto de soluciones será el vacío, como sucede en el siguiente ejemplo: Óptimo $F = 5x + 2y$ sujeto a, $3x + y \leq 0$, $3x + y \geq 2$, $x, y \geq 0$, la primera restricción y la segunda son excluyentes. Y la región factible es vacía.

La opción B es correcta; es el caso en que alguna restricción es superflua.
El conjunto factible puede estar, o no estar, acotado ⇒ C es cierta.

10. El siguiente problema de programación lineal Min $F = 3x + y$ sujeto a las restricciones $2x + 3y \leq 3$, $3x + y \geq 3$, $x, y \geq 0$: A) Tiene una única solución óptima; B) Tiene infinitas soluciones óptimas; C) No tiene ninguna solución factible; D) Ninguna de las anteriores.



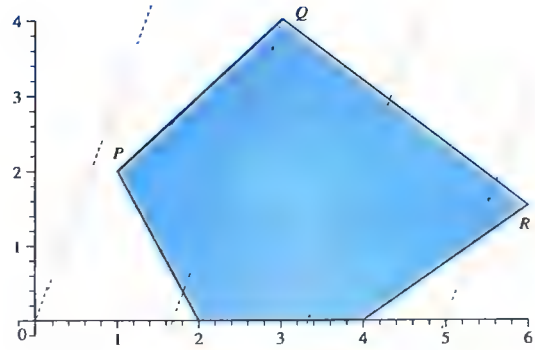
Para resolver este ejercicios tenemos que encontrar las soluciones del problema de programación lineal. Lo haremos aplicando el Teorema Fundamental, para lo que determinamos primero los vértices del convexo solución. Representamos gráficamente la región y observamos que los vértices son (1, 0), (3/2, 0) y (6/7, 3/7).

Como la región factible no es vacía, la respuesta C es falsa.

Por el Teorema Fundamental sabemos que el mínimo se alcanza en uno o varios de estos vértices. Determinamos en cuál(es) $F(1,0) = 3$, $F\left(\frac{3}{2},0\right) = \frac{9}{2}$, $F\left(\frac{6}{7},\frac{3}{7}\right) = 3$.

Como el mínimo se alcanza simultáneamente en (1, 0) y (6/7, 3/7) entonces, se alcanza en todos los puntos del segmento comprendido entre ellos. Hay infinitas soluciones y la única respuesta correcta es B.

11. Consideramos el problema de programación lineal donde se trata de minimizar la función objetivo Max $z = 3x - y$ para la región factible representada en la gráfica, entonces el óptimo se alcanza: A) En P y Q; B) Sólo en Q; C) Ni en el punto P ni en el punto Q; D) En ninguno de las anteriores.



En la gráfica se han representado también rectas de la forma $3x - y = k$ para $k \in \mathbb{R}$.

Para saber si k aumenta o disminuye, nos fijamos en la gráfica de $3x - y = 0$ y elegimos un punto de uno de los semiespacios que define, por ejemplo el punto (2,0) entonces $3.2 - 0 = 6$ y por tanto k aumenta. Luego, el máximo se alcanza en el punto $R \Rightarrow$ La respuesta correcta es C.

12. El siguiente problema Min $F = 2x - 3y + z$ sujeto a las restricciones $2x + y + z \leq 6$, $x + y + z \geq 0$, $x, y, z \geq 0$: A) Tiene un único vértice óptimo; B) Tiene dos vértices óptimos; C) Los óptimos se alcanzan en un segmento; D) Ninguna de las anteriores.

Para resolver el problema aplicando el Teorema Fundamental, primero debemos determinar los vértices de la región factible. Observamos que la segunda restricción es redundante, porque si $x, y, z \geq 0$ entonces también será $x + y + z \geq 0$. Luego las región factible está delimitada por $2x + y + z \geq 6$, $x, y, z \geq 0$. Los vértices de esta región son los puntos de intersección del plano $2x + y + z = 6$ con los ejes de coordenadas, junto con el punto de intersección de los planos $x = 0$, $y = 0$ y $z = 0$. Estos puntos son (3, 0, 0), (0, 6, 0), (0, 0, 6) y (0, 0, 0). Para determinar dónde se alcanza el mínimo, tenemos que calcular el valor de la función objetivo en estos puntos

$F(0, 0, 0) = 0$ $F(3, 0, 0) = 6$ $F(0, 6, 0) = -18$ $F(0, 0, 6) = 6$

$\Rightarrow$ El mínimo se alcanza en (0, 6, 0) y sólo hay un vértice óptimo, que es dicho punto. A es correcta y las otras respuestas son falsas.

13. En un problema de programación lineal es cierto que: A) Cuando el convexo de soluciones es acotado, la función objetivo puede alcanzar el óptimo en un punto interior; B) Cuando el convexo de soluciones no es acotado, la función objetivo puede no alcanzar el óptimo en el conjunto; C) Cuando el convexo de soluciones no es acotado el óptimo puede estar en alguno de los vértices; D) Ninguna de las anteriores.

Si el convexo solución es acotado, la función objetivo debe alcanzar el óptimo en un vértice o en el segmento que une varios vértices, luego A es falsa.

Cuando el convexo de soluciones no es acotado, la función objetivo puede no alcanzar el óptimo en el conjunto, como se mostró en el ejercicio 5 del cap. 8-2 $\Rightarrow$ B es correcta.

Es cierto que, aunque el convexo de soluciones no sea acotado, el óptimo puede estar en alguno de los vértices por tanto, C también es correcta.

14. Si a y b son dos números reales tales que $a > 1 > b > 0$, es cierto que en el problema Max $F = x + y$ sujeto a las restricciones $ax + by \leq 2$, $x \geq 0$, $y \geq 0$ su óptimo se alcanza en: A) $x = 0$, $y = 2/b$; B) $x = 2/a$, $y = 0$; C) El óptimo no se alcanza nunca; D) Ninguna de las anteriores.

El óptimo se alcanza en los vértices del conjunto factible.

¿Vértices de la región factible?.

Al hacer la intersección de las rectas $ax + by = 2$, $x = 0$, $y = 0$, que delimitan el conjunto factible. Se obtienen (0, 0), $(2/a, 0)$ y $(0, 2/b)$. El valor de F en estos puntos es:

$$F(0, 0) = 0,\ F(2/a, 0) = 2/a,\ F(0, 2/b) = 2/b.$$

Como $a > b$, entonces $2/a < 2/b$ y el máximo se alcanza en $(0, 2/b)$. Es correcta A.

15. Sean a y b dos números reales positivos. En el problema de programación lineal Max $F = ax - y$ sujeto a las restricciones $x + by \leq 1$, $x \geq 0$, $y \geq 0$, se verifica: A) El valor óptimo de la función objetivo es a; B) La región factible es no acotada y el óptimo no existe; C) El óptimo no se alcanza nunca; D) La región factible es vacía; E) Ninguna de las anteriores.

¿Vértices del conjunto factible?.

Por el Teorema Fundamental, sabemos que el óptimo se alcanza en los vértices del conjunto factible. Estos vértices son (0, 0), (1, 0) y $(0, 1/b)$. La región factible es acotada $\Rightarrow$ B es falsa. C también es falsa como sabemos por el Teorema Fundamental. El valor de F en estos puntos es:

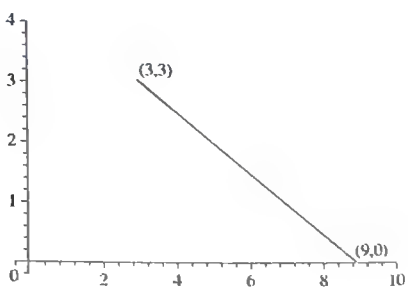
$$F(0,0) = 0,\ F(1,0) = a,\ F\left(0, \frac{1}{b}\right) = -\frac{1}{b}.$$

Luego el máximo (a y b son mayores que 0) se alcanza en (1, 0) y es a. La respuesta correcta es A.

16. En el ejercicio 6 del cap. 8-1, referente a una fábrica de juguetes, ¿cuántas unidades de cada producto se deben producir en el día para minimizar los gastos?: A) No se pueden determinar; B) La solución óptima no existe; C) La solución óptima no es única; D) Ninguna de las anteriores.

Tenemos el problema de programación lineal: Min $z = 4x_1 + 2x_2$ sujeto a las restricciones: $20x_1 + 40x_2 = 180$, $x_1 \geq x_2$, x_1, $x_2 \geq 0$.

No existen restricciones superfluas y la región factible es un segmento de extremos (3,3) y (9,0).



Aplicando el Teorema Fundamental, sabemos que la función objetivo $z = 4x_1 + 2x_2$ toma en los vértices los valores:

$$z\,(3, 3) = 4.3 + 2.3 = 18,\ z(9, 0) = 4.9 + 2.0 = 36.$$

Por tanto el mínimo existe y es único. Los gastos mínimos se obtienen fabricando al día 3 unidades del producto X y 3 unidades del producto Y.

$\Rightarrow$ La única opción cierta es D.

17. En el ejercicio 7 del cap. 8-1, referente a inversiones: A) Se necesitan cuatro variables de holgura; B) Se necesitan tres variables de holgura; C) La solución óptima no es única; D) Ninguna de las anteriores.

Tenemos el siguiente problema de programación lineal: Max $z = 0{,}10x_1 + 0{,}07x_2$ sujeto a las restricciones $x_1 + x_2 \leq 1000$, $x_1 \leq 600$, $x_2 \geq 200$, $x_1, x_2 \geq 0$.

Añadiendo variables de holgura a las restricciones, se obtiene el sistema: $x_1 + x_2 + x_3 = 1000$, $x_1 + x_4 = 600$, $x_2 - x_5 = 200$, $x_2 - x_1 + x_6 = 0$.

El n.º de variables de holgura añadidos es 3 $\Rightarrow$ B es cierta y A falsa.

Para saber si la solución óptima es única o no, lo mejor es resolver el problema. Primero se determinan los vértices (en el ejercicio 7 ya determinamos la región factible) y luego se aplica el Teorema Fundamental. La función objetivo alcanza en los vértices los valores:

$$z(0, 200) = 14,\ z(0, 1000) = 70,\ z(600, 400) = 88,\ z(600, 200) = 74.$$

El máximo se alcanza en el vértice (600, 400) y C también es falsa.

18. Consideramos el problema de programación lineal del ejercicio 8 del cap. 8-1 en el problema de programación lineal que resulta se verifica: A) El máximo de la función objetivo es 6000 €; B) La función objetivo alcanza el

máximo sólo en un vértice; C) El óptimo se alcanza sólo en dos vértices; D) Ninguna de las anteriores.

Tenemos el problema de programación lineal: "Calcular el max de $z = 150x_1 + 300x_2$ con las restricciones: $x_1 + 2x_2 \leq 40$, $x_1 \geq 0$, $x_2 \geq 0$".

Sabemos que los vértices de la región factible son $A(0,0)$, $B(0,20)$ y $C(40,0)$. También sabemos, por el Teorema Fundamental, que el máximo se debe alcanzar en los vértices de la región factible.

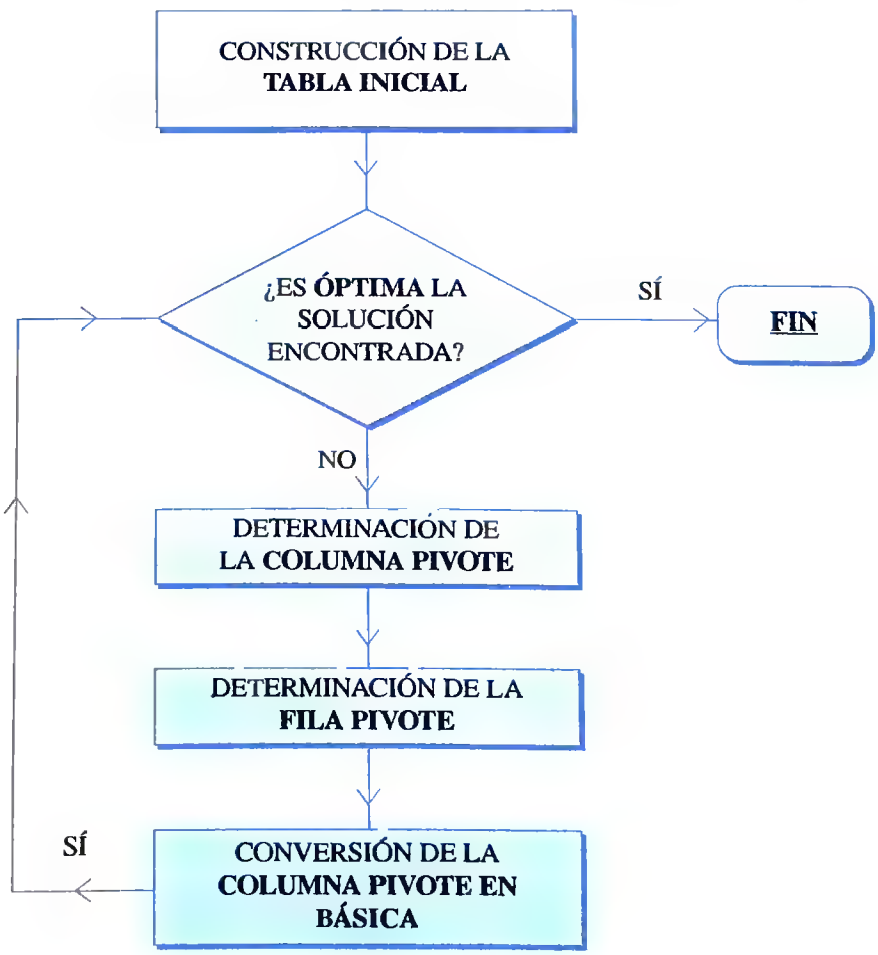
La función objetivo alcanza en ellos los siguientes valores: $z_A = 0$, $z_B = 6000$ y $z_C = 6000$. Por tanto, el máximo se alcanza en los vértices B y C y vale 6000 $\Rightarrow$ La opción A es cierta y B es falsa.

❖ Cuando el máximo se alcanza en dos vértices, significa que, las curvas de nivel son paralelas al lado del polígono convexo que une esos dos vértices y por tanto tiene el mismo valor óptimo para todos los puntos del segmento $\Rightarrow$ C también es una opción falsa, ya que el máximo de la función objetivo se alcanza en cualquier punto del segmento que une B y C.

Ejercicios relativos a:

"Fundamentos del Algoritmo Simplex"

ALGORITMO DEL MÉTODO SIMPLEX



1. El Test de Maximalidad en el Algoritmo Simplex determina: A) La fila y la columna pivotes; B) Si hemos llegado o no a la solución óptima; C) El elemento pivote; D) Ninguna de las anteriores.

❖ El Test de Maximalidad nos permite afirmar, que hemos llegado a la solución óptima, cuando la fila objetivo no tiene valores negativos.

❖ La columna pivote es la columna a la que pertenece el elemento más negativo de la fila objetivo y, en un paso posterior, se convierte en columna básica.

La columna pivote se determina con el elemento más negativo, no con ningún test.

❖ La fila pivote es aquella en la que es mínimo el cociente entre los términos independientes y los elementos positivos correspondientes de la columna pivote.

Luego tampoco la fila pivote se determina con ningún test, sino a partir de unos cocientes.

❖ El elemento pivote es el único elemento que pertenece simultáneamente a la columna y a la fila pivotes y tampoco se determina con ningún test.

⇒ Sólo es correcta la opción B.

2. El Algoritmo Simplex no tiene relación con el concepto: A) Pivote; B) Fila objetivo; C) Segmento; D) Ninguna de las anteriores.

❖ Al resolver un problema por el Método Simplex, hay que determinar una o varias veces el elemento pivote. Además, se tiene en cuenta siempre la fila objetivo. Sin embargo, ningún segmento de la región factible (ni tampoco la región factible) tiene relación con el Algoritmo Simplex. La respuesta C es cierta.

3. En el siguiente problema de programación lineal: Max $F = x_1 - 2x_2 - 3x_3$, $2x_1 - 3x_2 - 3x_3 \leq 3$, $3x_1 + x_2 - x_3 \leq 5$, $x_1, x_2, x_3 \geq 0$ si se pretende resolver con el Algoritmo Simplex: A) No se puede hacer porque nos debería pedir determinar el mínimo de la función objetivo; B) Hay que introducir 2 variables de holgura; C) No hay que introducir nuevas variables; D) Ninguna de las anteriores.

Los problemas que se pueden resolver, en principio, por el Algoritmo Simplex, son aquellos en que se pide buscar el máximo de la función objetivo. Si nos pidieran determinar el mínimo, tendríamos que transformarlo (multiplicando F por -1) en un problema de máximo $\Rightarrow$ A no es correcta.

❖ Para resolver por el Algoritmo Simplex, tenemos que transformar las desigualdades en igualdades.

¿Problema equivalente después de introducir las variables de holgura?.

Introduciendo las variables de holgura, x_4 y x_5, el problema queda: Max $x_1 - 2x_2 - 3x_3$, $2x_1 - 3x_2 - 3x_3 + x_4 = 3$, $3x_1 + x_2 - x_3 + x_5 = 5$, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5 \geq 0$.

$\Rightarrow$ B es cierta y C es falsa.

4. En el problema anterior, la fila objetivo en la tabla inicial del método Simplex es: A) $-1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0$; B) $1 \quad -2 \quad -3 \quad 0 \quad 0$; C) $1 \quad -2 \quad -3$; D) Ninguna de las anteriores.

❖ El primer paso para la resolución de un problema por el Algoritmo Simplex es la construcción de la tabla inicial, donde se representan los coeficientes de las restricciones, las variables de holgura, los términos independientes y la fila objetivo (que representa la función objetivo, con los coeficientes cambiados de signo).

¿Tabla inicial?.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{b}$
x_4	2	-3	-3	1	0	3
x_5	3	1	-1	0	1	5
FO	-1	2	3	0	0	0

FO, que es la fila objetivo, es $-1 \quad 2 \quad 3 \quad 0 \quad 0 \quad 0$ y no es ninguna de las respuestas indicadas. Luego D es correcta.

5. En el problema anterior, siguiendo los pasos del Algoritmo Simplex: A) La solución encontrada es óptima; B) La solución encontrada no es óptima; C) No podemos saber si la solución encontrada es óptima, sin más datos; D) Ninguna de las anteriores.

¿Es óptima la solución encontrada en el ejercicio anterior?.

❖ El segundo paso es determinar si la solución encontrada es óptima para lo que se aplica el test de maximalidad: "Si la fila objetivo no tiene valores negativos hemos llegado a una solución óptima".

En nuestro caso, la solución encontrada es (0, 0, 0, 3, 5) y no es óptima, como se puede comprobar al observar que en la fila objetivo *FO* hay entradas negativas (la primera entrada es negativa). Es cierta la opción B.

6. En la tabla inicial del ejercicio 3 de cap. 8-6, la columna pivote es: A) La primera; B) La segunda; C) La última; D) Ninguna de las anteriores.

¿Cuál es la columna pivote?.

❖ Para determinar la columna pivote, nos fijamos en la *FO* y el elemento más negativo.

En esta tabla el elemento más negativo en la *FO* es –1 por tanto, la primera columna es la columna pivote. La respuesta correcta es A.

7. Si seguimos en el mismo ejercicio 3, en la tabla inicial, la fila pivote: A) Se puede determinar a partir de los signos de los elementos de la función objetivo; B) Es la segunda fila; C) No se puede determinar sin más datos; D) Ninguna de las anteriores.

¿Cuál es la fila pivote?.

❖ La fila pivote es aquella en la que es mínimo el cociente entre los términos independientes y el elemento (positivo) correspondiente de la columna pivote, es decir, es $\min_{1\le k\le m}\left\{\frac{b_k}{a_{ki}}\right\}=\frac{b_j}{a_{ji}}$, donde b_k son los términos independientes y a_{ki} son los elementos positivos de la columna pivote.

Luego la fila pivote no se determina a partir de los signos de ningún elemento y A es falsa y como se puede determinar, C también es falsa.

En este caso, los cocientes a considerar son: $\frac{3}{2}$ y $\frac{5}{3}$. La fila pivote buscada es la primera porque $\frac{3}{2} < \frac{5}{3} \Rightarrow$ B es falsa y sólo es cierta la opción D.

8. Tras el ejercicio anterior, el siguiente paso, en el Algoritmo Simplex, es: A) Aplicar el Test de Maximalidad; B) Se ha terminado el problema; C) Determinar el elemento pivote; D) Ninguna de las anteriores.

¿Cuál es el elemento pivote?.

❖ Una vez que se tienen la fila y la columna pivotes, hay que determinar el elemento pivote, que es el que está en ambas.

En este caso, es la entrada (1, 1). Por lo tanto la variable x_1 entra como variable básica y sale la variable x_4 que pasa a ser variable no básica.

9. En el ejercicio anterior, al convertir la columna pivote en básica: A) Tenemos que hacer que todos los términos de la columna pivote sean 0; B) Tenemos que hacer que todos los términos de la columna pivote sean 0, menos el elemento pivote que se queda como está; C) Sólo se cambian la última columna y la columna pivote; D) Ninguna de las anteriores.

El siguiente paso,

❖ en la conversión de la columna PIVOTE en BÁSICA, primero hay que convertir el elemento pivote en 1 y, posteriormente, aplicar el método de Gauss-Jordan (realizando operaciones elementales con las filas de la tabla), para obtener 0 en todos los coeficientes de la columna pivote, excepto en el elemento pivote (que es 1).

Luego no son correctas ni A ni B ni C. Sólo es correcta D.

10. En el ejercicio 8, al convertir la columna pivote en básica: A) Hay que dividir la primera fila entre 2; B) Hay que multiplicar la primera fila por 2; C) Se trabaja con las columnas, no con las filas; D) Ninguna de las anteriores.

Para convertir el elemento pivote, que vale 2, en 1, dividimos por 2 la fila pivote (la primera), $F_1 \leftrightarrow \frac{1}{2}F_1$ y seguimos llamando F_1 a esa fila. Luego la opción A es correcta. Aunque se considera la columna pivote, se realizan operaciones elementales entre las filas, y C es falsa.

11. En el ejercicio 8, para convertir la columna pivote en básica, tras el paso del ejercicio 10: A) Hay que sumar la primera fila resultante con la segunda; B) Hay que dejar la segunda fila como está; C) En la fila objetivo se transforma su primer elemento en 0; D) Ninguna de las anteriores.

Tras convertir el elemento pivote en un 1, aplicamos el método de Gauss-Jordan y transformamos las entradas de la columna pivote distintas del elemento pivote en ceros. Los otros cambios a efectuar en las filas son

$$F_2 \leftrightarrow F_2 - 3F_1,\ F_3 \leftrightarrow F_3 + F_1.$$

Sólo C es cierta. La tabla que resulta es:

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\overline{b}$
x_1	1	$\frac{-3}{2}$	$\frac{-3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$
x_5	0	$\frac{11}{2}$	$\frac{7}{2}$	$\frac{-3}{2}$	1	$\frac{1}{2}$
FO	0	$\frac{1}{2}$	$\frac{3}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	$\frac{3}{2}$

12. Tras convertir la columna pivote en básica, la solución al ejercicio anterior: A) Es $\left(\frac{3}{2},0.0\right)$; B) No se puede determinar porque hay que volver a determinar una nueva columna pivote; C) Hay que volver a aplicar el Test de Maximalidad; D) Ninguna de las anteriores.

Si nos fijamos en la nueva *FO* vemos que ya no existen entradas negativas y, al aplicar el test de maximalidad, observamos que el proceso ha terminado y no tenemos que determinar de nuevo la columna pivote. Luego C es correcta y B es falsa. Consecuentemente, la solución obtenida. $\left(\frac{3}{2},0,0,0,\frac{1}{2}\right)$ mejora la anterior y tenemos un valor máximo $F=\frac{3}{2}$ con las restricciones dadas. La solución óptima para el problema inicial es $\left(\frac{3}{2},0,0\right)$. A también es correcta.

13. El problema de programación lineal: Max $F=-2x_1+3x_2+4x_3$, sujeto a $x_1+x_2-2x_3\geq 2$, $x_1-x_2-x_3\leq 1$, $x_1, x_2, x_3\geq 0$, verifica que: A) Mediante el Método Simplex se puede calcular su solución óptima; B) No se puede calcular su solución mediante el Método Simplex; C) No tiene solución; D) Tiene solución pero no se puede determinar mediante el Método Simplex.

¿Sistema equivalente con variables de holgura x_4 y x_5?.

Max $F=-2x_1+3x_2+4x_3$, sujeto a $x_1+x_2-2x_3-x_4=2$, $x_1-x_2-x_3+x_5=1$, $x_1, x_2, x_3, x_4, x_5\geq 0$.

¿Tabla inicial?.

	x_1	x_2	x_3	x_4	x_5	$\bar{b}$
x_4	1	1	–2	–1	0	2
x_5	1	–1	–1	0	1	1
FO	2	–3	–4	0	0	0

¿Columna pivote?.

El elemento más negativo de la fila objetivo es –4 , luego la columna pivote es la tercera.

¿Fila pivote?.

Sin embargo no se puede determinar la fila pivote porque en la columna pivote no existen elementos positivos para calcular los cocientes correspondientes.

En este caso

❖ Si en la columna pivote no existen elementos positivo ocurre que el problema está mal modelado, o la función objetivo no está acotada o el problema no tiene solución.

⇒ No podemos seguir aplicando el Método Simplex y debemos buscar otra manera de resolverlo. A es falsa y B es cierta.

¿Tiene solución el problema?.

Si nos fijamos en las restricciones, los puntos que verifican $x_1 = x_3 = 0$ y $x_2 \geq 2$ están en la región factible y como la variable x_2 puede tomar valores suficientemente grandes se observa que la función objetivo $F = -2x_1 + 3x_2 + 4x_3$ no alcanzará el máximo y por tanto el problema dado no tiene solución. C también es cierta.

RENOVADA
JAR'23

JAR'23

JAR"23

Cruzcampo CAFE - BAR LIBA Cruzcampo
JAR'23

NCHA-1
EL SIGLO
JAR'23

JAR'23